Тест, Май 2007, Решения

1. **Докажете, че**

$$|\int_\gamma e^{\sin z} dz| \leq 1,$$

като интегрирането се извършва по имагинерната отсечка $\gamma = [0, i]$.

Решение:

Върху отсечката γ е валидно представянето $z = iy$, $y \in [0,1]$. От формулите на Euler знаем, че

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

След заместването получаваме

$$\int_\gamma e^{\sin z} dz = i \int_{[0,1]} e^{\frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}} dy.$$

Очевидно

$$|e^{\frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}}| = 1,$$

откъдето веднага следва търсената оценка.

2. **Вярно ли е или не равенството**

$$\oint_{C_0(1)} \bar{z} dz = \oint_{C_0(1)} \frac{1}{z} dz.$$

Обосновете отговора си.

Решение: Знаем, че върху единичната окръжност

$$z\bar{z} = 1,$$

откъдето

$$\bar{z} = \frac{1}{z}.$$

Очевидно и написаното равенство е вярно.

3. **Нека Γ е гладък контур, свързващ точките $-3i$ и $3i$ и лежащ в дясната полуравнина $\{z, \mathcal{R}(z) > 0\}$. Да се пресметне $\int_\Gamma \frac{1}{z} dz$**

Решение: Полагаме
$$I := \int_\Gamma \frac{1}{z} dz$$
и избираме положително число $\varepsilon < 3$ по такъв начин, че кривата Γда лежи във външността на кръга $D_0(\varepsilon)$. След това разглеждаме функцията $f(z) = \frac{1}{z}$ в областта $\mathcal{D}$ с граница $\partial\mathcal{D} = \Gamma \bigcup [3i, i\varepsilon] \bigcup (-\gamma_\varepsilon) \bigcup [-i\varepsilon, -3i]$, където Γ е положително ориентирана,а кривата $-\gamma_\varepsilon$ е отрицателно ориентирана и е онази част от окръжността $C_0(\varepsilon)$, която се намира в дясната полуравнина. Тъй като $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D}$, то теоремата на Коши е приложима, откъдето
$$\int_{\mathcal{D}} f(z) dz = 0,$$
или
$$I = \int_{\gamma)\varepsilon} f(z) dz + \int_{[i\varepsilon, 3i]} f(z) dz + \int_{[-3i, -i\varepsilon]} f(z) dz.$$
По-нататък решението е познато.

4. **Нека $f \in \mathcal{A}(D_0(1))$ и $|f(z)| \leq M$ всеки път, когато $|z| = 1$. Докажете, $|f(0)| \leq M$ и $|f'(0)| \leq M$. Какво можем да кажем за $f^{(n)}(0)$?**

Решение: От интегралната теорема на Коши имаме
$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0(1)} \frac{f(z)}{z} dz,$$
откъдето следва първата оценка. По-нататък:
$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_0(1)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, n = 1, 2, \cdots$$

което води до
$$|f^{(n)}(0)| \leq n!M.$$

5. **Съществува ли степенен ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, който да е сходящ в точката $z = 2 + 3i$ и разходящ в $z = 3 - i$?**

Решение: Отговорът е "не."Действително, сравнявайки двата модула виждаме, че $|2+3i| > |3-i|$. По теоремата на Абел тогава сходимостта на реда в $z = 2+3i$ гарантира сходимост и в $z = 3-i$, протоворечи на условието.

6. Намерете Лорановото развитие на функцията $f(z) = z^2 \cos \frac{1}{3z}$ за $|z| > 0$.

Решение:Знаем, че
$$\cos \frac{1}{3z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(3z)^{2n}(2n)!}$$
Оттук получаваме
$$f(z) = z^2 - \frac{1}{18} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{z^{2n} 3^{2n+2} (2n+2)!}$$

7. Намерете Лорановото развитие на функцията $f(z) = \frac{z^2-2z+3}{z-2}$ в областта $|z-1| > 1$.

Решение:Използваме познатото преобразование
$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}.$$

Тъй като $|z-1|>1$**, то**

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n},$$

така че

$$\frac{1}{z-2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}.$$

Окончателно

$$f(z) = [(z-1)^2+2]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}.$$

1. Докажете, че

$$|\int_\gamma e^{\sin z} dz| \leq 1,$$

като интегрирането се извършва по имагинерната отсечка $\gamma = [0, i]$.

Упътване: Използвайте параметричното представяне на отсечката γ **и след това формулите на Euler за функцията** $\sin z$.

2.Вярно ли е или не равенството

$$\oint_{C_0(1)} \bar{z} dz = \oint_{C_0(1)} \frac{1}{z} dz.$$

Обосновете отговора си.

3. Нека Γ **е гладък контур, свързващ точките** $-3i$ **и** $3i$ **и лежащ в дясната полуравнина** $\{z, \mathcal{R}(z) > 0\}$. **Да се пресметне** $\int_\Gamma \frac{1}{z} dz$

Упътване: Разгледайте подинтегралната функция в подходяща област и използвайте теоремата на Коши.

4. Нека $f \in \mathcal{A}(D_0(1)$ **и** $|f(z)| \leq M$ **всеки път, когато** $|z| = 1$. **Докажете,** $|f())| \leq M$ **и** $|f'(0)| \leq M$. **Какво можем да кажем за** $f^{(n)}(0)$**?**

5. Съществува ли степенен ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, **който да е сходящ в точката** $z = 2 + 3i$ **и разходящ в** $z = 3 - i$?

Упътване: Сравнете двата модула и приложете теоремата на Абел.

6. Намерете Лорановото развитие на функцията $f(z) = z^2 \cos \frac{1}{3z}$ **за** $|z| > 0$.

7. Намерете Лорановото развитие на функцията $f(z) = \frac{z^2-2z+3}{z-2}$ **в областта** $|z - 1| > 1$.