test march 2008

1. Наметере образа на правите $x = a, y = b$ посредством трансформацията $w(z) = \frac{z-a}{z-ib}$, $a, b \in \mathcal{R}$.

Решение: Полагаме $l_1 := \{z, x = a\}$, $l_2 := \{z, y = b\}$. Образите при трансформацията w означаваме с $L_i, i = 1, 2$. По -нататък :

$$\begin{cases} \infty \longrightarrow 1, \\ 0 \longrightarrow -i\frac{a}{b} \\ a \longrightarrow 0 \\ ib \longrightarrow \infty \end{cases}$$

От $a, \infty, 0 \in l_1$ следва $0, 1, -i\frac{a}{b} \in L_1$, $1, \infty \in L_2$. Тъй като $l_1 \perp l_2$, то и $L_1 \perp L_2$. С други думи, L_1 е окръжността през точките $0, 1, -i\frac{a}{b}$,а L_2- правататпрез 1 и минаваща през центъра на тази окръжност.

2. Намерете образа на полуивицата $G := \{z = x + iy,\, 0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq \pi\}$ посредством трансформацията $w = \frac{e^z+1}{e^z-1}$.

Решение: Започваме с трансформацията $z_1 = e^z$. Тя изпраща контура на полуивицата в $\{z, x \leq -1\} \bigcup \{z, y \geq 0,\, |z| = 1\} \bigcup \{z, x \geq 1\}$, а самата полуивица - в неограничената област над този контур. Следващата трансформация е МЬОБИУСОВАТА

$$w = \frac{z_1 + 1}{z_1 - 1}.$$

Тя изпраща $\Re$ в себе си, а единичната окръжност $C_0(1)-$ в имагинерната ос $\Im$. Произволна точка от нашата област, напр. $z = 2i$, определя образа на цялата област. Тъй като

$$w(2i) = \frac{3 - 4i}{5},$$

то образът е четвъртият квадрант. И така, образът на полуивицата G при посоченото изображение $w(z)$ е четвъртият квадрант.

3. Намерете образа на полуивицата $G := \{z = x + iy,\, -\infty < x < 1,\, -\pi \leq y \leq \pi\}$ посредством трансформацията $w = \frac{e^z-1}{e^z+1}$.

Решение: Започваме с трансформацията $z_1 = e^z$. Тя изпраща областта G в кръга $K_0(e)$ с център в началото и радиус $= e$, разрязан по оцечката $[-e, 0]$. По -нататък трансформацията НА МЬОБИУС $w(z_1) = \frac{z_1-1}{z_1+1}$ изпраща окръжността $C_0(e)$ в окръжност C, центрирана върху реалната права и минаваща през точките $\frac{e-1}{e+1}, \frac{e+1}{e-1}$, а интервалът $[-e, 0]-$ в безкрайните лъчи $\{z, x \leq -e\}$ и $\{z, x \geq \frac{e+1}{e-1}\}$. Търсеният образ е външността на окръжността C, разрязана по горните лъчи.
4. Аналитична ли е функцията $f(z) = |z|$. Обосновете отговора.

Решение: Да допуснем, че $|z|$ е аналитична. Тази функция има само реална компонента, имагинерната част е тъждествена нула. Но тя ще удовлетворява уравненията на Коши Риман, понеже е аналитична, откъдето следва, че е тъждествена константа. Последното е очевидно невярно.

5. За какви стойности на z е вярно $1^z = 1$. Обосновете отговора.

Решение: Нека $z = x + iy$. По дефиниция, $1^z = e^{z \log 1}$, или

$$1^z = e^{z\text{arg } 1} = e^{zi2k\pi}, \, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Оттук

$$1^z = e^{2k\pi ix}e^{-y2k\pi} = (e^{2k\pi i})^x e^{-y2k\pi} = e^{-y2k\pi}.$$

Последният израз е равен на 1 за всяко k тогава и само тогава, когато $y = 0$, т.е., когато числото z е реално.

6. Наметере общия вид на трансформация на Moebius, която да изпраща дясната полуравнина без кръга $\{z, |z - \sqrt{2}| \leq 1\}$,върху венеца $\{z, 1 \leq |z| \leq a\}$.

Решение: Търсим двойката точки, инверсни едновременно спрямо имагинерната ос и окръжността $C_{\sqrt{2}}(1)$. Това са точките ± 1. Всяка трансформация $w(z) = K\frac{z-1}{z+1}$ с$K =$ константа изпраща посочената област във венец с център началото. Това следва от връзката между ДЛТ и инверсията. След подходящо нормиране на константата K стигаме до търсената трансформация.

7. Покажете, че ако $f(z)$ и $|f(z)|$ са едновременно аналитични в областта D, то $f \equiv Const$.

Решение: Нека

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) + C_1 + iC_2, C_{1,2} =$$

константи, е аналитична. От уравненията на Cauchy-Riemann следва

$$u_x = v_y, u_y = -v_x.$$

От аналитичността на $|f(z)|$ имаме

$$(u + C_1)u_x + (v + C_2)v_x = (u + C_1)u_y + (v + C_2)v_y = 0.$$

Последното е хомогенна линейна система спрямо u, v, детерминантата на която е равна на $u_x v_y - u_y v_x$, а тя е различна от нула поради условията на Cauchy-Riemann. Тогава $u \equiv -C_1, v \equiv -C_2$, т.е. функцията е тъждествена константа.