Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

ИНВАРИАНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТТОРЫ И НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

И. Н. БЕРНШТЕЙН, Д. А. ЛЕЙТЕС

В работе описаны все неприводимые представления супералгебры Ли векторных полей в дискретных модулях и сопряженных к дискретным — в формальных тензорных полях. В конечномерном случае вычислены характеры неприводимых представлений. Доказано, что инвариантные операторы в тензорных полях на супермногообразии исчерпываются внешним дифференциалом и интегралом. Введены интегральные формы, которые в гладком случае можно интегрировать в отличие от дифференциальных. Для комплексов интегродифференциальных форм установлен аналог леммы Пуанкаре о точности.

Введение. 1. Основное поле — поле вещественных или комплексных чисел, а в формальном случае — любое поле k характеристики 0. Пусть ϱ — представление группы $GL(n)$ в конечномерном пространстве V. Тензорным полем типа ϱ на n-мерном связном многообразии M называется объект t, задаваемый в каждой системе координат x вектор-функцией $t(x)$ со значениями в V, причем переход к координатам y задается формулой $t(y(x)) = \varrho(\partial y/\partial x)t(x)$, где $\partial y/\partial x$ — матрица Якоби. Пространство тензорных полей типа ϱ обозначается через $T(\varrho)$. На пространство $T(\varrho)$ естественным образом действует группа $\operatorname{Diff} M$ диффеоморфизмов многообразия M.

Оператор $c: T(\varrho_1) \to T(\varrho_2)$ называется инвариантным, если он перестановочен с действием группы $\operatorname{Diff} M$.

Вопрос о классификации таких операторов был поднят, по-видимому, О. Вебленом [19] (см. обзоры [7; 8; 13], где подробно освещена история). Оказывается, что если ограничиться неприводимыми представлениями $GL(n)$, то инвариантный дифференциальный оператор c по-существу только один — это внешний дифференциал d в дифференциальных формах.

Впервые это доказал (в формальном случае) А. Н. Рудаков [11], позже результат переоткрыли Чу-лан Тен (см.) [7]) и А. А. Кирилов [6].

А. Н. Рудаков расасмтривал в [11] формальный аналог вышеприведенной гладкой задачи. Мы покажем, что эти задачи практически эквивалентны (см. Дополнение), поэтому разумно решать именно формальный вариант, так как к нему применимы простые методы теории представлений.

2. В последнее время, в основном, в связи с приложениями в физике, большое внимание привлекают к себе супермногообразия и супералгебры Ли (см. обзоры [10; 17; 9], где описаны уже имеющиеся успехи и возможные перспективы использования супермногообразий). На супермногообразиях тоже можно рассматривать тензорные поля и инвариантные операторы в этих полях. Возникает задача классификации всех таких операторов.

Мы заинтересовались этой задачей при попытке перенести на супермногообразия теорию интегрирования (см. [1; 2]). Дело в том, что на супер-

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 7, 1981, с. 320—334.

многообразиях дифференциальные формы интегрировать нельзя. Придумав интегральные формы — те, которые интегрировать можно, — мы захотели убедиться, что других тензорных объектов, годных для интегрирования, нет (ср. [20]). Для этого мы обобщили метод А. Н. Рудакова и описали все инвариантные операторы в тензорных полях на супермногообразии. Как мы и ожидали, инвариантные операторы существуют только для дифференциальных и интегральных форм. Это служит доказательством того, что теорию интегрирования на супермногообразии, содержащую аналог формулы Стокса, можно построить только на интегральных формах. См., впрочем, [2], где интегрируются псевдодифференциальные формы на супермногообразии $\mathfrak{M}$, не являющиеся тензорными полями на $\mathfrak{M}$, но являющиеся тензорными полями на супермногообразии $\widehat{\mathfrak{M}}$ (определение $\widehat{\mathfrak{M}}$ см. в [2]).

3. Опишем вкратце содержание статьи. Пусть $\mathfrak{L}=W(n, m)$ — супералгебра Ли формальных векторных полей от n четных и m нечетных переменных, $L_0=\mathfrak{gl}(n, m)$ — подсупералгебра Ли линейных векторных полей. Каждому конечномерному представлению супералгебры Ли L_0 отвечает суперпространство $T(\varrho)$ формальных тензорных полей типа ϱ, на котором естественным образом действует супералгебра Ли $\mathfrak{L}$.

Важными примерами тензорных полей являются дифференциальные и интегральные формы. Дифференциальные формы образуют коммутативную супералгебру $\Omega=\oplus\Omega^i$, $i\geqq 0$, а интегральные формы образуют Ω-модуль $\Sigma=\oplus\Sigma_j$, $j\geqq n-m$. Мы определяем дифференциал $d:\Omega^i\to\Omega^{i+1}$, $d:\Sigma_j\to\Sigma_{j+1}$, который является инвариантным оператором.

При $m=0$ суперпространства интегральных и дифференциальных форм совпадают. При $n=1$ мы определяем суперпространство $\Phi=\oplus\Phi^\lambda$, $\lambda\in k$, обобщающее дифференциальные и интегральные формы (их „аналитическое продолжение“ по степени λ). Суперпространство Φ наделено структурой коммутативной супералгебры.

В 2 мы излагаем основные результаты:

1. Аналог леммы Пуанкаре: гомологии дифференциала d равны нулю везде, кроме Ω^0 и Σ_{n-m}; в этих случаях они одномерны.

2. Описание всех $\mathfrak{L}$-инвариантных операторов $c:T(\varrho_1)\to T(\varrho_2)$ для неприводимых представлений ϱ_1, ϱ_2 супералгебры Ли L_0. Все нетривиальные такие операторы по-существу совпадают с дифференциалом d. При $n=0$ имеется еще один инвариантный оператор — интеграл Березина $\int:\Sigma_{-m}\to k\to\Omega^0$.

3. Из 1) и 2) выводится полное описание неприводимых непрерывных представлений супералгебры Ли $\mathfrak{L}$. А именно, если ϱ — неприводимое представление супералгебры Ли L_0, то $\mathfrak{L}$-модуль $T(\varrho)$ также неприводим, если он не совпадает с одним из модулей Ω^i, Σ_j (и при $m=1$ с Φ^λ). В противном случае неприводимы модули $\operatorname{Ker} d\cap\Omega^i$, $\operatorname{Im} d\cap\Sigma_j$ и $\operatorname{Ker} d\cap\Phi^\lambda$. Эти модули — полный список неприводимых непрерывных $\mathfrak{L}$-модулей.

4. В частном случае $n=0$ мы получаем классификацию конечномерных неприводимых представлений конечномерной супералгебры Ли $W(0, m)$. Кроме того, мы даем их геометрическую реализацию и вычисляем характеры.

5. Когда четных координат нет, т. е. при $n=0$, все операторы, действующие в тензорных полях, дифференциальные. По сравнению с чисто четным случаем ($m=0$) проявляется только один лишний инвариантный оператор — интеграл. При $n\neq 0$ интеграл — нелокальный оператор. Естественно

предположить, что интеграл — единственный инвариантный нелокальный оператор. Так оно и есть, и в Дополнении мы формулируем соответствующую теорему.

Замечание. Задачу, решенную в этой работе, можно обобщать в нескольких направлениях: заменить $W(n, m)$ на другую супералгебру Ли сходной структуры (см. [12; 14; 8]) или увеличить „арность" оператора (см. [15; 5; 4]).

В этой работе подробно изложены доказательства теорем частично анонсированных в [3, 16] и рассказанных на семинарах Э. Б. Винберга — А. Л. Онищика, Ю. И. Манина и П. К. Рашевского в МГУ и А. М. Вершика в ЛГУ в 1976 г. Нам приятно поблагодарить руководителей этих семинаров и А. Н. Рудакова за интерес к этой работе.

1. Предварительные сведения. 1.1. Линейная алгебра в суперпространствах. Все пространства рассматриваются над фиксированным полем k характеристики 0; необходимые сведения см. в [18] и [9, гл. 1].

Суперпространством называется Z_2-градуированное пространство $V = V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}$. Вектор $v \in V_i$, где $i \in Z_2$, называется однородным четности i, пишем $p(v) = i$. Через $\Pi(V)$ обозначим суперпространство, определенное формулами $\Pi(V)_{\bar 0} = V_{\bar 1}$, $\Pi(V)_{\bar 1} = V_{\bar 0}$, и через π — естественный нечетный морфизм $V \to \Pi(V)$.

Назовем размерностью суперпространства V элемент $\dim V = \dim V_{\bar 0} + \varepsilon \dim V_{\bar 1}$ алгебры $Z[\varepsilon]/(\varepsilon^2 - 1)$ (обычно коротко пишут $\dim V = (\dim V_{\bar 0}, \dim V_{\bar 1})$).

Супералгеброй называется суперпространство A вместе с четным морфизмом mult: $A \otimes A \to A$. Определим коммутатор на супералгебре A, задав его на однородных элементах формулой $[a, b] = ab - (-1)^{p(a)p(b)}ba$ и продолжив на неоднородные по линейности. Коммутативной супералгеброй называется супералгебра, в которой коммутирование тривиально.

Супералгеброй Ли называется супералгебра $\mathcal{L}$ с операцией $(x, y) \to [x, y]$ такой, что $[x, y] = -(-1)^{p(x)p(y)}[y, x]$; $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{p(x)p(y)}[y, [x, z]]$.

Очевидным образом определяются модули над ассоциативными супералгебрами и супералгебрами Ли.

Гомоморфизм A-модулей — это такой гомоморфизм $\psi: M \to N$, что $\psi(am) = (-1)^{p(a)p(\psi)}a\psi(m)$ для всех $a \in A, m \in M$. Определим A-модуль $\Pi(M) = \{\pi(m), m \in M\}$, положив $a\pi(m) = (-1)^{p(a)}\pi(am)$.

1.2. Представления супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, m)$. На пространстве матриц порядка $n+m$ введем Z_2-градуировку, положив

$$p\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \bar 0; \quad p\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \bar 1,$$

где A и D — матрицы порядка n и m соответственно, а коммутирование, заданное формулой $[X, Y] = XY - (-1)^{p(X)p(Y)}YX$, превращает это суперпространство в супералгебру Ли, которую обозначают через $\mathfrak{gl}(n, m)$.

В $\mathfrak{gl}(n, m)$ нам потребуются следующие подалгебры:

а. Картановская подалгебра $\mathfrak{h}$ с базисом $\{h_i = E_{ii}, i = 1, \ldots, n+m\}$.

б. Нильпотентная подалгебра $\mathfrak{n}_+$ с базисом $\{E_{ij}, i < j\}$.

Пусть V есть $\mathfrak{gl}(n, m)$-модуль, $v \in V$ — собственный вектор относительно $\mathfrak{h}$ с весом λ. Мы будем называть v весовым вектором с весом $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+m})$, где $\lambda_i = \lambda(h_i)$, $\lambda_i \in k$.

Старшим вектором модуля V называется такой ненулевой однородный весовой вектор $v \in V$, что $\mathfrak{n}_+ v = 0$.

Теорема (о старшем весе). *Конечномерный $\mathfrak{gl}(n, m)$-модуль V имеет старший вектор v_h. Если V неприводим, то вектор v_h единственен, с точностью до пропорциональности. Его вес λ и четность $p(v_h)$ определяют модуль V с точностью до изоморфизма.*

Вес λ называется старшим весом неприводимого модуля V. Старший вес λ конечномерного модуля может иметь не любой набор отметок $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+m})$, а только такой, что $\lambda_i - \lambda_j \in Z_+$ при $i < j \leq n$ и при $n < i < j$.

Доказательство следует из теоремы 8 в [18].

Примеры. а) $V(0; \bar{0})$ — тривиальное представление $\mathfrak{gl}(n, m)$ в $(1, 0)$-мерном суперпространстве;

б) $V(1, 0, \ldots, 0; \bar{0})$ — стандартное представление $\mathfrak{gl}(n, m)$ в (n, m)-мерном суперпространстве вектор-столбцов;

в) $V(0, \ldots, 0, -1; \nu($ — сопряженное представление в вектор-строках здесь $\nu = \bar{1}$, если $m > 0$, и $\nu) = \bar{0}$, если $m = 0)$;

г) представление $V(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1; (n-m) \bmod 2)$, где единиц n штук, одномерно. Оно задается формулой

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \operatorname{tr} A - \operatorname{tr} D.$$

Эта функция $\mathfrak{gl}(n, m)$-инвариантна и называется суперследом.

1.3. Супералгебра Ли векторных полей. Рассмотрим набор переменных $x = (x_1, \ldots, x_{n+m}) = (u_1, \ldots, u_n, \xi_1, \ldots, \xi_m)$, где u — четные, а ξ — нечетные переменные, и обозначим через $\mathcal{F}$ коммутативную супералгебру $k[[x]]$ формальных степенных рядов от x. Через J обозначим максимальный идеал в $\mathcal{F}$, порожденный $\{x_i\}$. Зададим топологию на $\mathcal{F}$, считая идеалы J^r, $r = 0, 1, 2, \ldots$ окрестностями нуля. $\mathcal{F}$ — полное кольцо в этой топологии.

Обозначим через $W(n, m)$ супералгебру Ли непрерывных дифференцирований супералгебры $\mathcal{F}$ (она называется супералгеброй Ли векторных полей). Определим частные производные $\partial_i = \partial / \partial x_i \in W(n, m)$ формулой $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$. Ясно, что $p(\partial_i) = p(x_i)$ и $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Любой элемент $D \in W(n, m)$ имеет вид $D = \Sigma f_i \partial_i$, где $f_i = D(x_i) \in \mathcal{F}$. Мы будем обозначать супералгебру Ли $W(n, m)$ через $\mathcal{L}$. Определим фильтрацию в $\mathcal{L}$ вида $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-1} \supset \mathcal{L}_0 \supset \mathcal{L}_1 \supset \ldots$, полагая

$$\mathcal{L}_r = \{D \in W(n, m) | D\mathcal{F} \subset J^{r+1}\} = \Sigma J^{r+1} \partial_i.$$

Ясно, что $\mathcal{L}_r J^s \subset J^{r+s}$, откуда $[\mathcal{L}_r, \mathcal{L}_s] \subset \mathcal{L}_{r+s}$.

Обозначим через $L = \oplus L_r$ присоединенную градуированную супералгебру Ли, где $L_r = \mathcal{L}_r / \mathcal{L}_{r+1}$. Супералгебру Ли L_0 будем отождествлять с $\mathfrak{gl}(n, m)$ с помощью изоморфизма $x_i \partial_j \to E_{ij}$.

1.4. Тензорные поля. Пусть ϱ — представление супералгебры Ли $L_0 = \mathfrak{gl}(n, m)$ в конечномерном суперпространстве V. Положим $T(V) = \mathcal{F} \otimes_k V$. Суперпространство $T(V)$ наследует топологию с $\mathcal{F}$.

Чтобы определить действие супералгебры Ли $\mathcal{L}$ на $T(V)$, сопоставим каждому векторному полю $D = \Sigma f_i \partial_i$ матричнозначную функцию $\Sigma D^{ij} E_{ij}$, где $D^{ij} = (-1)^{p(x_i)(p(f_j)+1)} \partial_i f_j$. Сопоставим векторному полю D оператор $L_D : T(V) \to T(V)$, полагая

$$L_D(fv) = D(f)v + (-1)^{p(D)p(f)} \Sigma D^{ij} \varrho(E_{ij})(v),$$

где $f \in \mathcal{F}$, $v \in V$. Оператор L_D называется производной Ли (вдоль поля D). Обычно мы будем писать $D(t)$ вместо $L_D(t)$. Суперпространство V вложено в $T(V)$ как $1 \otimes V$. Элементы $t \in T(V)$ назовем тензорными полями типа V, а элементы $t \in 1 \otimes V$ тензорными полями с постоянными коэффициентами. Они характеризуются условиями $\partial_i t = 0$, $i = 1, \ldots, n+m$. Для каждого тензорного поля $t = \Sigma f_i v_i$ через $t(0)$ обозначим его значение в нуле, $t(0) \in V$.

Пример. Суперпространство $\mathcal{L}$, рассматриваемое как $\mathcal{L}$-модуль, является пространством тензорных полей типа id, где id — представление супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, m)$ в пространстве V с базисом $\{\partial_i\}$, заданное формулой $id\ (E_{ij})\partial_r = [x_j \partial_i, \partial_r] = (-1)^{(p(x_j)+p(x_i))p(x_r)} \delta_{jr}\partial_i$. При этом $L_D(D') = [D, D']$.

Производная Ли на тензорных полях согласована с действием супералгебры $\mathcal{F}$, то есть

$$(*) \qquad L_D(ft) = D(f)t + (-1)^{p(f)p(D)} f L_D(t), \text{ где } f \in \mathcal{F},\ D \in \mathcal{L},\ t \in T(V).$$

1.5. Мы также будем пользоваться другим эквивалентным определением тензорных полей. Обозначим через $U(\mathcal{L})$ и $U(\mathcal{L}_0)$ универсальные обертывающие супералгебры супералгебр Ли $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_0$. Представление ϱ супералгебры Ли $L_0 = \mathcal{L}_0/\mathcal{L}_1$ мы продолжим до представления супералгебры Ли $\mathcal{L}_0$ и затем до представления $U(\mathcal{L}_0)$.

Зададим морфизм $\psi: T(V) \to \mathrm{Hom}_{U(\mathcal{L}_0)}(U(\mathcal{L}), V)$, полагая $\psi(t)(X) = (-1)^{p(t)p(X)} X(t)(0)$. Из теоремы Пуанкаре—Биркгофа—Витта вытекает, что $U(\mathcal{L}) = U(\mathcal{L}_0) \oplus U(L_{-1})$. Поскольку $\mathrm{Hom}\,(k[\partial_1, \ldots, \partial_{n+m}], k) \cong \mathcal{F}$, то ψ изоморфизм, так что можно положить: $T(V) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{U(\mathcal{L}_0)}(U(\mathcal{L}), V)$. Производная Ли в этом определении задается формулой $L_D(u)(X) = (-1)^{p(D)(p(u)+p(X))} u(XD)$.

Пространства тензорных полей можно охарактеризовать аксиоматически. Пусть T — конечнопорожденный $\mathcal{F}$-модуль, на котором задано действие супералгебры Ли $\mathcal{L}$, согласованное с действием супералгебры $\mathcal{F}$ по формуле 1.4 (*). Предположим, что

$$(*) \qquad \mathcal{L}_1 T \subset JT.$$

Тогда на пространстве $V = T/JT$ возникает представление супералгебры Ли $L_0 = \mathcal{L}_0/\mathcal{L}_1$. Каждому элементу $t \in T$ можно сопоставить гомоморфизм $t^h: U(\mathcal{L}) \to V$, полагая $t^h(u) = (-1)^{p(t)p(u)} ut \mod JT$. Таким образом, мы получаем морфизм $\psi: T \to \mathrm{Hom}_{U(\mathcal{L}_0)}(U(\mathcal{L}), V)$. Легко проверить, что ψ сохраняет структуры $\mathcal{L}$- и $\mathcal{F}$-модулей. Кроме того, ψ задает изоморфизм $T/JT \cong V \cong T(V)/JT(V)$. Поскольку $T(V)$ есть свободный $\mathcal{F}$-модуль, то из леммы Накаяма вытекает, что ψ — изоморфизм.

Замечание. Если заменить условие (*) более слабым условием, что действие супералгебры Ли $\mathcal{L}$ непрерывно (то есть отображение $D \to D(t)$ непрерывно для любого $t \in T$), то можно показать, что в T имеется конечная фильтрация модулями, факторы которой изоморфны модулям типа $T(V)$. На геометрическом языке это означает, что T реализуется как некоторое пространство джетов.

1.6. Дифференциальные формы. Введем наряду с x переменные $'x_i$ так, чтобы $p('x_i) = p(x_i) + \bar{1}$, и определим коммутативную супералгебру дифференциальных форм Ω как алгебру полиномов $\mathcal{F}['x]$. Неформально говоря, $'x_i$ — это просто dx_i. Мы введем в Ω градуировку по степени переменных $'x$. Каждое Ω^i является конечнопорожденным $\mathcal{F}$-модулем с базисом $\{'x^{\varkappa}='x_1^{\varkappa_1}\ldots 'x_{n+m}^{\varkappa_{n+m}}\}$, где $\varkappa$ пробегает мультииндексы $(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{n+m})$, $\varkappa_i\in Z_+$, причем $\varkappa_i=0$, 1 при $i\leq n$.

Определим в супералгебре Ω внешний дифференциал $d:\Omega^i\to\Omega^{i+1}$, положив $d=\Sigma' x_i\partial_i$.

По каждому векторному полю $D=\Sigma f_i\,\partial_i$ определим дифференцирование $i_D:\Omega^i\to\Omega^{i-1}$, положив $i_D=\Sigma(-1)^{p(D)}f_i\partial/\partial' x_i$. Назовем i_D внутренним умножением на поле D. Кроме того, положим $L_D=[d, i_D]$ и назовем L_D-производной Ли вдоль поля D.

Лемма. а) $p(d)=\bar 1$, $\deg d=1$, $d^2=[d,d]/2=0$;

б) $p(i_D)=p(D)+\bar 1$, $\deg i_D=-1$, $[i_D, i_{D'}]=0$, $i_{fD}=(-1)^{p(f)}fi_D$;

в) $p(L_D)=p(D)$, $\deg L_D=0$.

Если $f\in\mathcal{F}=\Omega^0$, *то* $L_D(f)=D(f)$.

г) $[d, L_D]=0$, $[L_D, i_{D'}]=(-1)^{p(D)}i_{[D,D']}$, $[L_D, L_{D'}]=L_{[D,D']}$.

Все эти утверждения легко проверяются. Легко проверить, что действие супералгебры Ли $\mathcal{L}$ на Ω удовлетворяет условию 1.5 (*), так что Ω — это суперпространство тензорных полей. Соответствующее суперпространство $V=\Omega/J\Omega$ изоморфно супералгебре полиномов $k['x]$ и представление ϱ имеет вид $\varrho(E_{ij})='x_j\,\partial/\partial' x_i$. Отсюда легко выводится, что представление ϱ в суперпространстве $V^r=\Omega^r/J\Omega^r$ неприводимо.

1.7. Интегральные формы. Рассмотрим супералгебру I операторов, действующих на Ω, порожденную умножениями на функции $f\in\mathcal{F}$ и операторами i_D, где $D\in\mathcal{L}$. Ясно, что $I=\mathcal{F}['\partial_1,\ldots,'\partial_{n+m}]$, где $'\partial_j=\partial/\partial' x_j=(-1)^{p(x_j)}i\partial_j$. Это градуированная алгебра, причем Ω является как Ω-, так и I-модулем. Аналогично можно определить на I структуру Ω-модуля, полагая $'x_i=\partial/\partial('\partial_i)$.

Обозначим через Σ свободный градуированный I-модуль с одной образующей Δ, где $\deg\Delta=n-m$, а $p(\Delta)=(n-m)\bmod 2$. Элементы $\sigma\in\Sigma$ назовем интегральными формами. На суперпространстве Σ мы будем рассматривать следующие структуры.

(а) Структура градуированного Ω-модуля, заданная формулой $'x_j(P\Delta)=('x_jP)\Delta$, где $P\in I$.

(б) Структура градуированного I-модуля, в частности, если $D\in\Sigma f_i\,\partial_i\in\mathcal{L}$, то определено внутреннее умножение на D: оператор $i_D=\Sigma(-1)^{p(D)}f_i{}'\partial_j$.

(в) Внешний дифференциал $d:\Sigma\to\Sigma$, заданный формулой

$$d(P\Delta)=(\Sigma' x_j\partial_jP)\Delta=(\Sigma\partial^2P/\partial('\partial_j)\partial x_j)\Delta$$

(г) Для каждого $D\in\mathcal{L}$ определена производная Ли $L_D=[d, i_D]$.

Лемма. а) $p(d)=\bar 1$, $\deg d=1$, $d^2=0$

б) $p(i_D)=p(D)+\bar 1$, $\deg i_D=-1$, $[i_D, i_{D'}]=0$, $i_{fD}=(-1)^{p(f)}fi_D$.

в) *Операторы* d, i_D, L_D *являются дифференцированиями* Ω-*модуля* Σ, *согласованными с соответствующими дифференцированиями супералгебры* Ω, *т. е.* $D(\omega\sigma)=D(\omega)\sigma+(-1)^{p(D)p(\omega)}\omega D(\sigma)$, *где* $\omega\in\Omega$, $\sigma\in\Sigma$, *а* D — *один из операторов* d, i_D *или* L_D.

г) $[d, L_D]=0$, $[L_D, i_{D'}]=(-1)^{p(D)} i_{[D, D']}$, $[L_D, L_{D'}]=L_{[D, D']}$.

Легко проверить, что действие супералгебры Ли $\mathfrak{L}$ на Σ удовлетворяет условию 1.5 (*), так что Σ — пространство тензорных полей. Соответствующее пространство $\Sigma/J\Sigma=V_\Sigma$ изоморфно $k['\partial]\Delta$. Легко проверить, что представление ϱ_Σ супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, m)$ в V_Σ имеет вид $\varrho_\Sigma(E_{ij})(P\Delta)=(-1)^{p(x_j)}\,'x_j('\partial_i P)\Delta$ (здесь $P\in k['\partial]$, $'x_i=\partial/\partial('\partial_i)$). Из этой формулы легко выводится, что представление ϱ_Σ в суперпространстве $V^r_\Sigma=\Sigma_r/J\Sigma_r$ неприводимо (r меняется от $-\infty$ до $n-m$).

Замечание. V^{n-m}_Σ — это одномерный $\mathfrak{gl}(n, m)$-модуль со старшим весом $(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$, где единиц n штук, связанный с суперследом, описанный в примере 1.2. Формы $\sigma\in\Sigma_{n-m}$ геометрически имеют смысл форм объема (см. [1]).

1.8. Особые случаи. а) Случай $m=0$. В этом случае $\Omega^i=0$ при $i>n$ и $\Sigma_i=0$, при $i<0$. Кроме того, отображение $\Delta\mapsto 'x_1\ldots 'x_n$ задает изоморфизм Σ с Ω, сохраняющий все структуры.

б) Случай $n=0$. В этом случае имеется морфизм $\mathfrak{L}$-модулей $\int:\Sigma_{-m}\to k$, который мы называем интегралом Березина. Он задается условиями $\int\xi_1\ldots\xi_m\Delta=1$ и $\int\xi_1^{\nu_1}\ldots\xi_m^{\nu_m}\Delta=0$, если хотя бы одно ν_i равно 0.

Мы будем также обозначать через $\int$ композицию $\int:\Sigma_{-m}\to k\to\Omega^0$ интеграла и естественного вложения.

в) Случай $m=1$. В этом случае Ω^r и Σ_s можно включить в единую серию тензорных полей Φ^λ, где $\lambda\in k$. Пусть $x=(u_1, \ldots, u_n, \xi)$. Рассмотрим Ω-модуль $\Phi=\oplus\Phi^\lambda$, градуированный элементами $\lambda\in k'$ порожденный образующими $'\xi^\lambda$, где $\deg{}'\xi^\lambda=\lambda\in k$, а $p('\xi^\lambda)=0$, и соотношениями $'\xi'\xi^\lambda='\xi^{\lambda+1}$ (мы считаем, что $\deg{}'x_i=1\in k$). Определим операторы ∂_i и $'\partial_i=\partial' x_i$, полагая $\partial_i'\xi^\lambda=0$, $\partial' u_i('\xi^\lambda)=0$ и $\partial'\xi('\xi^\lambda)=\lambda'\xi^{\lambda-1}$ и зададим на Φ операторы d, i_D, L_D как в дифференциальных формах. Легко проверить, что выполнены условия, аналогичные условиям лемм 1.6 и 1.7. Очевидно, что Φ — коммутативная супералгебра.

Пространство $V^\lambda_\Phi=\Phi^\lambda/J\Phi^\lambda$ имеет базис $'x^\varkappa$, где $\varkappa=(\nu_1, \ldots, \nu_n, \mu)$, $\nu_i=0, 1$, $\mu\in k$, $|\nu|+\mu=\lambda$. Представление ϱ_Φ имеет вид $\varrho_\Phi(E_{ij})='x_j'\partial_i$. Отсюда вытекает, что при $\lambda\notin Z$ представление ϱ_Φ в суперпространстве V^λ_Φ неприводимо.

Ω-модуль $\oplus_{r\in Z}\Phi^r$ имеет разложение

$$(*)\qquad 0\to\Omega\xrightarrow{\alpha}\oplus_{r\in Z}\Phi^r\xrightarrow{\beta}\Sigma\to 0,$$

где α и β заданы формулами $\alpha(\omega)=\omega\,.\,'\xi^0$ и $\beta('u_1\ldots 'u_n'\xi^{-1})=\Delta$. Очевидно, что отображения α и β согласованы со структурой Ω-модуля и операторами d, i_D и L_D.

Точность последовательности (*) легко вытекает из явного описания базисов над $\mathfrak{F}$ в Ω, Σ и Φ.

2. Результаты. 2.1. Аналог леммы Пуанкаре.

Теорема 1.1) *Последовательность* $\Omega^0\xrightarrow{d}\Omega^1\to\ldots$ *точна.* $\operatorname{Ker} d\cap\Omega^0=k$, *т. е. состоит из констант.*

2) *Последовательность* $\ldots\xrightarrow{d}\Sigma_{-1-m}\xrightarrow{d}\Sigma_{-m}\xrightarrow{d}\ldots\xrightarrow{d}\Sigma_{n-m}\xrightarrow{d}0$ *точна везде, кроме члена* Σ_{-m}. *В этом члене пространство* $\operatorname{Ker} d/\operatorname{Im} d$ *порождено элементом* $\xi_1\ldots\xi_m{}'\partial_1\ldots{}'\partial_n\Delta$.

3) *При* $m=1$ *последовательность* $\ldots \xrightarrow{d} \Phi^{\lambda-1} \xrightarrow{d} \Phi^{\lambda} \xrightarrow{d} \Phi^{\lambda+1} \xrightarrow{d} \ldots$ *точна при любом* $\lambda \notin \mathbb{Z}$. *При* $\lambda \in \mathbb{Z}$ *имеем разложение* (*) 1.8.

4) *При* $n=0$ *точна последовательность* $\ldots \xrightarrow{d} \Sigma_{-1-m} \xrightarrow{d} \Sigma_{-m} \xrightarrow{1} \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \ldots$

2.2. Описание инвариантных операторов. Пусть V_1, V_2 — неприводимые конечномерные $\mathfrak{gl}(n, m)$-модули и $c: T(V_1) \to T(V_2)$ — ненулевой $\mathscr{L}$-инвариантный оператор.

Теорема 2. *Заменяя, если нужно,* V_1 *на* $\Pi(V_1)$ *и* V_2 *на* $\Pi(V_2)$, *мы придем к одной из следующих возможностей.*

а. *Существует изоморфизм* $c': V_1 \to V_2$, *который задает изоморфизм* $c: T(V_1) \to T(V_2)$.

б. $T(V_1)$, $T(V_2)$ — *изоморфны как* $(\mathscr{L}, F)$-*модули двум соседним членам в одной из последовательностей теоремы* 1, *а* c *совпадает с отображением* d *или с* $\int$.

2.3. Описание неприводимых $\mathscr{L}$-модулей. Мы рассмотрим две категории $\mathscr{L}$-модулей: дискретные и топологические. Дискретным назовем такой $\mathscr{L}$-модуль I, что

(*) Для любого вектора $i \in I$ суперпространство $V(\mathscr{L}_0)i$ конечномерно и $\mathscr{L}_1^{r(i)}\, i=0$ для некоторого $r(i) \in \mathbb{N}$.

Каждому дискретному $\mathscr{L}$-модулю I соответствует топологический $\mathscr{L}$-модуль $I^* = \mathrm{Hom}_k(I, k)$ с топологией, базу окрестностей нуля которого образуют аннуляторы конечномерных подсуперпространств модуля I. Модуль I восстанавливается по модулю I^*, ибо $I = \mathrm{Hom}_k^c(I^*, k)$, где Hom^c означает суперпространство непрерывных гомоморфизмов.

Эти две категории $\mathscr{L}$-модулей являются аналогами категории конечномерных модулей над конечномерной простой алгеброй Ли. В частности, при $m=0$ эти категории совпадают с категорией конечномерных $\mathscr{L}$-модулей.

Следующая теорема описывает неприводимые $\mathscr{L}$-модули в категории топологических $\mathscr{L}$-модулей. Описание неприводимых непрерывных $\mathscr{L}$-модулей получается из теоремы 3 автоматически.

Теорема 3. а. *Если* V-*неприводимый* $\mathfrak{gl}(n, m)$-*модуль, то у* $T(V)$ *есть единственный неприводимый фактор-модуль* $\mathrm{irr}\, T(V)$.

б. *Если* $T(V)$ *не входит ни в одну из последовательностей теоремы* 1, *то* $\mathrm{irr}\, T(V) = T(V)$, *а* $\mathrm{irr}\, \Sigma_i = \mathrm{Im}\, d \cap \Sigma_i$, $\mathrm{irr}\, \Omega^i = \mathrm{Ker}\, d \cap \Omega^i$, $\mathrm{irr}\, \Phi^\lambda = \mathrm{Ker}\, d \cap \Phi^\lambda$, $\lambda \notin \mathbb{Z}$.

в. $\Omega^i/\mathrm{irr}\, \Omega^i \cong \Pi(\mathrm{irr}\, \Omega^{i+1})$, *а* $\Sigma_j/\mathrm{irr}\, \Sigma_j \cong \Pi(\mathrm{irr}\, \Sigma_{j+1})$, *при* $j \neq -m$, $(\mathrm{Ker}\, d/\mathrm{Im}\, d) \cap \Sigma_{-m} \cong k$, *а* $\Phi^\lambda/\mathrm{irr}\, \Phi^\lambda \cong \Pi(\mathrm{irr}\, \Phi^{\lambda+1})$ *при* $\lambda \notin \mathbb{Z}$.

г. *Модули* $\mathrm{irr}\, T(V)$ *и* $\Pi(\mathrm{irr}\, T(V))$ *попарно неэквивалентны и исчерпывают все неприводимые топологические* $\mathscr{L}$-*модули.*

2.4. Характеры конечномерных $\mathscr{L}$-модулей. Пусть $\mathscr{L} = W(0, m)$. Пусть W — группа Вейля, φ — первый фундаментальный вес, ϱ — полусумма положительных корней алгебры Ли L_0, а $\{\varphi_i\}$ — веса L_0 — модуля L_{-1}. Пусть $D = \Sigma_{w \in W} \mathrm{sgn}\, w e^{w\varrho}$, а $N = \Pi(1 + \varepsilon e^{\varphi_i})$.

Теорема 4. *Пусть* $L(\chi)$ — *неприводимый* L_0-*модуль со старшим весом* χ; *четность старшего вектора равна* $\bar{0}$. *Тогда*

1) $\mathrm{ch}\, T(L(\chi)) = N\, \mathrm{ch}\, L(\chi)$;

2) $\mathrm{ch}\, d\Omega^r = (1/D) \Sigma_{w \in W} \mathrm{sgn}\, w \,.\, w \,[e^{r\varphi+\varrho} \prod_{\varphi_i \neq (1, 0, \ldots, 0)} (1 + \varepsilon e^{\varphi_i})]$;

3) $\mathrm{ch}\, d\Sigma_{-m-r} = -(-\varepsilon)^m (1/D) \Sigma_{w \in W} \mathrm{sgn}\, w \,.\, w\, [e^{-r\varphi+\varrho} \prod_{\varphi_i \neq (1, 0, \ldots, 0)} (1 + \varepsilon e^{\varphi_i})]$.

3. Доказательства. 3.1. Доказательство леммы Пуанкаре Пусть K — один из комплексов $0 \to \Omega_0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \cdots$ или $\cdots \xrightarrow{d} \Sigma_{n-m-1} \xrightarrow{d} \Sigma_{n-m} \xrightarrow{d} 0$. Положим $L_j = L_{x_j \partial_j}$. Из формулы $L_j = [d, i_{x_j \partial_j}]$ вытекает, что операторы L_j тривиально действуют в когомологиях $H(K)$ комплекса K.

Легко проверить, что мономы $x^{\varkappa'} x^{\nu}$ и $x^{\varkappa'} \partial^{\nu} \Delta$ собственны относительно оператора L_j. Отсюда вытекает, что $K = K' \oplus K''$, где $K' = \operatorname{Ker} L_j$, а $K'' = \operatorname{Im} L_j$. Поскольку оператор L_j обратим на комплексе K'', то он обратим на его когомологиях $H(K'')$, откуда $H(K'') = 0$. Таким образом, $H(K) = H(K')$.

Поскольку все операторы L_j коммутируют, $H(K) = H(\cap \operatorname{Ker} L_j)$. Опишем комплекс $\cap \operatorname{Ker} L_j$.

а. Случай дифференциальных форм. Оператор L_j умножает моном $x^{\varkappa'} x^{\nu}$ на $\lambda_j = \varkappa + \nu_j$. Условие $\lambda_j = 0$ означает, что $x_j = \nu_j = 0$. Значит $\cap \operatorname{Ker} L_j = k \,.\, 1 \subset \Omega^0$.

б. Случай интегральных форм. Оператор L_j умножает моном $x^{\varkappa'} \partial^{\nu} \Delta$ на $\lambda_j = \varkappa_j - \nu_j + (-1)^{p(x_j)}$. Если $\varrho(x_i) = \bar{0}$, то $\nu_j \leq 1$, и условие $\lambda_j = 0$ влечет $\varkappa_j = 0$, $\nu_j = 1$. Если $p(x_j) = \bar{1}$, то $\varkappa_j \leq 1$ и условие $\lambda_j = 0$ влечет $\varkappa_j = 1$, $\nu_j = 0$, значит $\cap \operatorname{Ker} L_j = k \,.\, \xi_1 \ldots \xi_m{}' \partial_1 \ldots {}' \partial_n \Delta \subset \Sigma_{-m}$.

Отсюда сразу вытекают пункты 1 и 2 теоремы 1. Пункт 3 доказывается аналогично. Пункт 4 вытекает из 1 и 2.

3.2. Дискретные и топологические $\mathscr{L}$-модули. Теоремы 2 и 3 удобно доказывать на языке дискретных модулей. Следующие утверждения очевидны.

а. $\operatorname{Hom}_{\mathscr{L}}(I_1, I_2) \cong \operatorname{Hom}^c_{\mathscr{L}}(I_2^*, I_1^*)$.

б. Замкнутые $\mathscr{L}$-подмодули в I^* биективно соответствуют $\mathscr{L}$-подмодулям в I (подмодулю $I' \subset I$ отвечает модуль $(I/I')^* = \operatorname{Ann} I' \subset I^*$).

Если ϱ — представление супералгебры Ли L_0 в конечномерном суперпространстве V, то положим $I(V) = V(\mathscr{L}) \otimes_{U(\mathscr{L}_0)} V$ (здесь, как и выше, мы продолжаем ϱ до представления $U(\mathscr{L}_0)$). Легко проверить, что $I(V)$ — дискретный $\mathscr{L}$-модуль.

Лемма. $I(V)^* \cong T(V^*)$.

Доказательство. $T(V^*) = \operatorname{Hom}_{U(\mathscr{L}_0)}(U(\mathscr{L}), V^*) \cong \operatorname{Hom}_k(U(\mathscr{L}) \otimes_{U(\mathscr{L}_0)} V, k)$ $= \operatorname{Hom}_k(I(V), k)$.

Таким образом, вместо модулей $T(V)$ мы можем изучать модули $I(V)$, которые несколько проще описывать.

3.3. Особые векторы. Пусть I — дискретный $\mathscr{L}$-модуль. Пространство $I^{\mathscr{L}_1} = \{z \in I / \mathscr{L}_1 z = 0\}$ инвариантно относительно $\mathscr{L}_0$, так что оно естественно наделяется структурой L_0-модуля. Векторы $z \in I^{\mathscr{L}_1}$ называются особыми, см. [11].

Лемма. $\operatorname{Hom}_{\mathscr{L}}(I(V), I) = \operatorname{Hom}_{L_0}(V, I^{\mathscr{L}_1})$.

Доказательство. $\operatorname{Hom}_{\mathscr{L}}(I(V), I) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{L}_0}(U(\mathscr{L}) \otimes_{U(\mathscr{L}_0)} V, I) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{L}_0}$ $\times (V, I) = \operatorname{Hom}_{L_0}(V, I^{\mathscr{L}_1})$.

Эта лемма сводит задачу описания инвариантных операторов $c: I(V_1)$ $\to I(V_2)$ к нахождению L_0-гомоморфизмов $c_0: V_1 \to I(V_2)^{\mathscr{L}_1}$. Если V_1 неприводим, то гомоморфизм c_0 полностью определяется образом $c_0(v_h)$ старшего вектора $v_h \in V_1$. Вектор $c_0(v_h)$ является особым старшим вектором. Поэтому описание всевозможных гомоморфизмов c сводится к описанию особых старших векторов. Это описание мы проведем в следующем пункте.

Замечание. Вектор $c_0(v_h)$ может не отвечать никакому гомоморфизму $c: I(V_1)\to I(V_2)$ с неприводимым L_0-модулем V_1. Это происходит тогда, когда L_0-модуль $U(L_0)c_0(v_h)$ приводим.

3.4. Описание особых векторов в $I(V)$. Из разложения $U(\mathfrak{L})\simeq k[\partial]\otimes U(\mathfrak{L}_0)$ вытекает, что $I(V)\simeq k[\partial]\otimes V$. Мы проведем описание особых векторов в несколько более общей ситуации.

Лемма. *Пусть I — произвольный $\mathfrak{L}$-модуль, V — подсуперпространство в I, удовлетворяющее следующим условиям:*

а) $\mathfrak{L}_0 V\subset V$, $\mathfrak{L}_1 V=0$;

б) $I=k[\partial]\otimes V$.

Пусть $z\in I$ — особый старший вектор (т. е. $\mathfrak{L}_1 z=\mathfrak{n}_+ z=0$) и λ — его вес. Тогда найдется такой ненулевой старший вектор $v\in V$ с весом μ, что выполнена одна из возможностей

(i) $z=v$, $\lambda=\mu$.

(ii) *Имеется такой индекс r, что $z=\partial_r v+\Sigma_{i>r}\partial_i v_i$, где $v_i\in V$, $v_i\neq 0$ при $r\leq i$.*

Индекс r принимает одно из значений $1\leq r\leq n+1$ или $r=n+m$. При этом

α. *Если $r\leq n$, то $\lambda=(0,\ldots;0,-1,\ldots,-1;1,\ldots;1)$ ($r-1$ нулей).*

β. *Если $m>1$, $r=n+1$, то $\lambda=(0,\ldots,0;p,1,\ldots,1)$, где $p\in\mathbb{Z}$, $p\geq 1$.*

γ. *Если $m>1$, $r=n+m$, то $\lambda=(0,\ldots,0;p,0,\ldots,0)$, $p\in\mathbb{Z}$, $p\geq 0$.*

δ. *Если $m=1$, $r=n+1$, то $\lambda=(0,\ldots,0;s)$, $s\in k$.*

Во всех случаях $\mu_i=\lambda_i+\delta_{ir}$.

(iii) $n=0$, $m>1$, $\lambda=(0,\ldots,0)$, $\mu=(1,\ldots,1)$, $z=\partial_1\ldots\partial_m v$.

Выведем из этой леммы теорему 2. Пусть $c: T(V_1)\to V(V_2)$ — ненулевой инвариантный оператор. Ему отвечает гомоморфизм $c^*: I(V_2^*)\to I(V_1^*)$ и, значит, особый старший вектор $c^*(v^*)\in I(V_1^*)$. Пусть λ — вес вектора $c^*(v^*)$. Рассмотрим старший вектор $v\in V_1^*$, существование которого утверждается в лемме 4. Поскольку $\mathfrak{gl}(n,m)$-модуль V_1^* неприводим, то из теоремы о старшем весе вытекает, что μ — старший вес модуля V_1^*, а v_1 пропорционален старшему вектору $v^*\in V_1^*$. Домножив гомоморфизм c на константу, можно считать, что $v=v^*$. Этим условием c определяется однозначно, так что $\dim \mathrm{Hom}^c_{\mathfrak{L}}(T(V_1), T(V_2))=1$. Действительно, по индексам λ и μ можно определить, какой случай (i), (ii) или (iii) имеет место; если z и z' — векторы, отвечающие разным гомоморфизмам c и c', то $z-z'$ выражается через векторы v_i, веса которых отличаются от μ, что может быть только при $z-z'=0$.

Ясно, что случай $\lambda=\mu$, $z=v$ отвечает изоморфизму $V_1\simeq V_2$. Опишем, какие случаи, описанные в утверждении, отвечают операторам d и $\int$. Если $T=T(V)$ — некоторое суперпространство тензорных полей, то через $\lambda(T)$ обозначим старший вес $\mathfrak{gl}(n,m)$-модуля V^*. Тогда $\lambda(\Omega^r)=(0,\ldots,0;0,\ldots 0,-r)$, если $m>0$, а $\lambda(\Sigma_r^r)=(0,\ldots,0,-1,\ldots,-1,1,\ldots,1)$ при $-m\leq r\leq -m+n$, где $n-m-r$ нулей и m единиц; $\lambda(\Sigma_r)=(0,\ldots,0,m-r,1,\ldots,1)$, при $r\leq -m$, где n нулей, $\lambda(\Phi^s)=(0,\ldots,0;-s)$.

Это проверяется непосредственно, используя явное описание базисов над $\mathcal{F}$ в модулях Ω, Σ и Φ.

Таким образом, операторам d и $\int$ отвечают следующие возможности, описанные в лемме 4:

$d: \Omega^r \to \Omega^r$ случай (ii γ) и (ii δ) при $s \in Z$, $s < 0$,

$d: \Sigma_r \to \Sigma_{r+1}$ случай (ii α) и (ii δ) при $s \in Z$, $s > 0$,

$d: \Phi^s \to \Phi^{s+1}$ случай (ii δ) при $s \notin Z$,

$\int: \Sigma_{-m} \to \Omega^0$ случай (iii).

Заметим, что остался только один случай, когда особый вектор z не соответствует ни одному из выписанных операторов. Это случай (ii δ) с $s=0$, т. е. $m=1$, $\lambda=(0, \ldots, 0; 0)$, $\mu=(0, \ldots, 0; 1)$.

При $n=0$ он отвечает оператору $\int$, а при $n>0$ он вообще не отвечает никакому оператору, поскольку модуль $U(L_0)z$ приводим. Действительно, если бы модуль $U(L_0)z$ был неприводимым, то поскольку его старший вес λ равен 0, он был бы тривиален в силу теоремы о старшем весе. Однако $E_{n+1,1}(z)=E_{n+1,1}(\partial_{n+1}v)=\partial_1 v-\partial_{n+1}E_{n+1,1}v \neq 0$.

3.5. Доказательство леммы 4. В следующем пункте мы проведем описание особых векторов для супералгебр Ли $W(n, m)$ с небольшими n и m, а в этом пункте выведем из них общий случай. Вывод основан на следующей идее (ср. с [11]).

Пусть $R \in [1, 2, \ldots, n+m]$ — некоторое подмножество индексов. Рассмотрим подалгебру $\mathcal{L}^R=\{\Sigma f_j(\bar{x})\,\partial_j \mid \bar{x}=(x_i),\ i, j \in R\}$ и подсуперпространство $V^R=k[\partial_j]_{j \in R} \otimes V \subset I$. Тогда $\mathcal{L}^R$ — модуль I с подпространством V^R удовлетворяют условиям а), б) леммы 4, а z — особый старший вектор относительно $\mathcal{L}^R$. Используя описание особых векторов для супералгебры Ли $\mathcal{L}^R$, мы получим ограничения для веса и вида вектора z. Применяя этот прием для разных подмножеств R, мы получим полное описание z.

Итак, приступим к доказательству леммы 4. Пусть $z=\Sigma\partial^\nu z_\nu$, причем $v_\nu \neq 0$. Назовем глубиной вектора z число $d(z)=\max|\nu|$.

Случай 1. $d(z)=0$, т. е. $z \in V$. Он отвечает (i).

Случай 2. $d(z)=1$, то есть $z=\Sigma d_i v_i$, где $v_i \in V$ — весовые векторы, не все v_i равны 0. Поскольку z — старший вектор, то $E_{ij}z=0$ при $i<j$. Приравнивая к нулю коэффициенты при ∂_j, получаем, что

$$(*) \qquad v_i=(-1)^{p(E_{ij})}\varrho(E_{ij})v_j.$$

Пусть r — наименьший индекс, для которого $v_r \neq 0$. Из (*) вытекает, что $v=v_r$ — старший вектор. Кроме того, при $j>r$ имеем $E_{rj}v_j=\pm v_r$, так что $v_j \neq 0$.

Лемма 1. *Особый вектор z глубины* 1 *имеет следующие отметки:*

1. $W(1, 0)$. *Если* $z=\partial v$, *то* $\lambda=-1$.

2. $W(2, 0)$. *Если* $z=\partial_1 v_1+\partial_2 v_2$, *то* $\lambda=(-1, -1)$. *Если* $z=\partial_2 v_2$, *то* $\lambda=(0, -1)$.

3. $W(1, 1)$. *Если* $z=\partial_1 v_1+\partial_2 v_2$, *то* $\lambda=(-1, 1)$. *Если* $z=\partial_2 v_2$, *то* $\lambda=(0, s)$, $s \in k$.

4. $W(0, 2)$. *Если* $z=\partial_1 v_1+\partial_2 v_2$, *то* $\lambda=(p, 1)$, $p \geq 1$. *Если* $z=\partial_2 v_2$, *то* $\lambda=(0, -p)$, $p \leq 1$.

Используя эту лемму, разберем различные случаи леммы 4.

(ii α) $r \leq n$. Применяя лемму 5. 1.1) к супералгебре Ли $\mathcal{L}^r$, получаем $\lambda_r=-1$. Если $i<r$, то применяя 5. 1.2) к супералгебре Ли $\mathcal{L}^{ir}$, получаем $\lambda_i=0$. Если $i>r$, то из 5.1.2), 5.1.3) следует, что $\lambda_i=-1$ при $i \leq n$ и $\lambda_i=1$ при $j \geq n$, откуда вытекает (ii α).

(ii β, γ, δ) $r>n$. Из 5.1.3) вытекает, что $\lambda_i=0$ при $i\leq n$. Из 5.1.3) вытекает, что $\lambda_i=0$ при $i\leq n$. Далее, из 5.1.4) вытекает, что если $n<i<r$, то $\lambda_i=0$, $\lambda_r<0$, если $r<i$, то $\lambda_i=1$, $\lambda_r>0$. Отсюда, в частности, следует, что не может быть $n+1<r<n+m$. При $m>1$, $i=n+1$ имеет место (ii β), при $m>1$, $r=n+m$ — (ii γ) и при $m=1$ — (ii δ).

Случай 3. $d(z)>1$. Мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2. *Пусть $z\neq 0$ — особый старший вектор, $d(z)>1$.*

1. *Для $W(1, 0)$, $W(2, 0)$, $W(1, 1)$, $W(1, 2)$ таких векторов нет.*
2. *Для $W(0, 2)$ имеем $z=\partial_1\partial_2 v$, $\lambda=(0, 0)$, $\mu=(1, 1)$.*

Покажем, что если $d(z)>1$, то $n=0$. Пусть $n>0$, $z=\Sigma\partial^\nu v_\nu$, причем $v_\nu\neq 0$ и ν — входящий в него мультииндекс с $|\nu|>1$. Выберем индексы $i<j$ так, что $\nu_i+\nu_j>1$. Применив лемму 5.2.1) к подалгебре $\mathcal{L}^{ij}$, получаем противоречие.

Пусть теперь $n=0$, $z=\Sigma\partial^\nu v_\nu$, а $|\nu|>1$. Поскольку все ∂_i нечетные, то $\partial_i^2=0$, то есть $\nu_i\leq 1$. Пусть $\nu_i=\nu_j=1$. Применяя лемму 5.2.2), мы получаем, что $\lambda_i=\lambda_j=0$. Далее, если r — индекс, отличный от i и j, то, применяя лемму 5.1.4) к супералгебре Ли $\mathcal{L}^{ir}$, мы видим, что $\nu_r=1$, так как из $v=1$, $v_r=0$ следует, что $\lambda_i\neq 0$. Применяя лемму 5.2.2), мы получаем, что $\lambda_r=0$. Таким образом, $\nu=(1, \ldots, 1)$, $\lambda=(0, \ldots, 0)$.

Предположим, что в разложение $z=\Sigma\partial^\nu v_\nu$ входит мультииндекс ν с $|\nu|=1$. Пусть $\nu_i=1$, $\nu_j=0$. Ограничивая на $\mathcal{L}^{ij}$ и применяя лемму 5.1.4), мы получаем противоречие с равенством $\lambda_i=\lambda_j=0$.

Окончательно, $z=\partial_1\ldots\partial_m v$, причем ясно, что v старший вектор, т. е. мы получили случай (iii).

3.6. Доказательство лемм 5.1 и 5.2. а. Мы положим $h_i=x_i\partial_i$.

5.1.1) $u^2\partial(\partial v)=-2\varrho(h)v=0$, ибо $u^2\partial(v)=0$. Значит $\mu=0$, откуда $\lambda=-1$.

5.1.2) Если $f_1=\partial_1 v_1+\partial_2 v_2$, то применяя 5.1.1) к супералгебрам Ли $\mathcal{L}^1$ и $\mathcal{L}^2$, получаем $\lambda=(-1, -1)$.

Если $f_1=\partial_2 v_2$, то аналогично получаем $\lambda_2=-1$. Далее, рассмотрев вектор $f_1'=E_{21}f_1=-\partial_1 v_2+\partial_2\varrho(E_{21})\, v_2$ и, применив (5.1.1) к алгебре Ли $\mathcal{L}^1$, получаем, что $\mu=0$. Отсюда $\lambda_1=0$, т. е. $\lambda=(0, -1)$.

5.1.3) Пусть $f_1=\partial_1 v_1+\partial_2 v_2$. Из 5.1.1.) вытекает, что $\lambda_1=-1$. Далее, $(u\xi\partial_2)f_1=-\varrho(h_2)v_1-\varrho(E_{12})v_2=0$. В силу формулы (*) из п. 5 имеем $\varrho(E_{12})v_2=-v_1$. Поэтому $v_1=\varrho(h_2)v_1$, т. е. $\mu_2=1$, откуда $\lambda_2=1$, т. е. $\lambda=(-1, 1)$.

Если $f_1=\partial_2 v_2$, то из $u_1\partial_2 f_1=0$ следует $u_1\partial_2 v_2=0$, а из $u\xi\partial_1 f_1=u\xi\partial_2 f_1=0$ следует $h_1 v_2=u_1\partial_2 v_2=0$. Отсюда $\lambda=(0, s)$, причем $s\in k$.

5.1.4) Пусть $f_1=\partial_1 v_1+\partial_2 v_2$. Условие $\xi_1\partial_2 f_1=0$, т. е. $\partial_2 v_1+\partial_1(\xi_1\partial_2)v_1+\partial_2\times(\xi_1\partial_2)v_2=0$ эквивалентно тому, что $\xi_1\partial_2 v_1=0$ и $\xi_1\partial_2 v_2=v_1$, а $\xi_1\xi_2\partial_2 f_1=0$ — тому, что $\xi_2\partial_1 v_1-h_1 v_2=0$. Если $v_1\neq 0$, то $\lambda=(n, 1)$ и если слой конечномерен, то $n\in Z$, причем $n\geq 1$. Если $v_2\neq 0$, но $v_1=0$, то $\lambda=(0, n)$, и если слой конечномерен, то $n\in Z$, причем $n\leq 0$. Эти рассуждения проходят, если $\dim V\neq 1$. Если же $\dim V=1$, то $f_1=a\partial_1 v+b\partial_2 v$ и условия на старшесть и особость имеют вид $a(\xi_2\partial_1)v-bh_1 v=0$. Из 1-мерности V следует, что f_1 — старший, если $b\neq 0$, следовательно (т. к. f_1 весовой), $a=0$ и $\mu=(0, 0)$.

5.2.1). Разберем случай $W(1, 0)$, см. [11]. Положим $t=u^2\partial$, $s=u^3\partial$. По индукции легко проверить, что $[t, \partial^r]=-\partial^{r-1}[2rh-r(r-1)]$, $[s, \partial^r]=-3\partial^{r-1}t+\partial^{r-2}[3r(r-1)h-r(r-1)(r-2)]$.

Если $h(z)=r>1$ и $z=\partial^m v+\cdots$, то

$$\begin{cases} tz=-\partial^{r-1}[2rh-r(r-1)]v+\text{младшие члены}=0\\ sz=[3r(r-1)\mu_1-r(r-1)(r-2)]\partial^{r-2}v+\text{младшие члены}=0\end{cases}$$

Значит $2\mu_1 = r-1$, $3\mu_1 = r-2$, откуда $3(r-1) = 2(r-2)$, что невозможно.

б. Если $\mathfrak{L}$ — любая из рассматриваемых супералгебр, $z \in I$ — особый вектор и $z = \Sigma \partial^\nu v_\nu$, то все индексы ν_i равны 0 или 1. Для $i \leq n$ это вытекает из разобранного случая $W(1, 0)$, а для $i > n$ из того, что $\partial_i^2 = 0$.

в. Пусть $\mathfrak{L} = W(2, 0)$, $z = \partial_1\partial_2 v$, где $v \neq 0$. Тогда $z' = E_{21} z = -\partial_1^2 v + \cdots$ — особый вектор, что противоречит в). Аналогично разбирается случай $W(1, 1)$. Для $W(1, 2)$ имеется возможность $z = \partial_2\partial_3 v \cdots$. Но тогда $E_{21}E_{31}z = \pm\partial_1^2 v + \cdots$ — особый вектор, что противоречит б).

5.2.2). Пусть $z = \partial_1\partial_2 v$. Тогда $\xi\eta\partial_1(z) = [\partial_2(\eta\partial_1) + \partial_1(\xi\partial_1) - \partial_1]v = \partial_2\varrho(E_{21})v + \partial_1(\mu_1 - 1)v$. Отсюда $\mu_1 = 1$ и $\varrho(E_{21})v = 0$. Аналогично проверяется, что $\mu_2 = 1$ и $\varrho(E_{12})v = 0$. Таким образом v — старший вектор и $\lambda = (0, 0)$.

3.7. Доказательство теоремы 3. Пусть V — неприводимый L_0-модуль, $T \subset T(V)$ — собственный замкнутый подмодуль.

(i) Докажем, что имеется неприводимый L_0-модуль V' и ненулевой инвариантный оператор $c: T(V) \to T(V')$ такие, что $T \subset \operatorname{Ker} c$. Действительно, как показано в 3.2, модуль $T(V)/T$ имеет вид I^* для некоторого дискретного модуля I, и $\operatorname{Hom}^c_{\mathfrak{L}}(T(V)/T, T(V')) = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{L}}(I(V'^*), I) = \operatorname{Hom}_{L_0}(V'^*, I^{\mathfrak{L}_1})$. По определению дискретного модуля суперпространство $I^{\mathfrak{L}_1}$ отлично от нуля и содержит некоторый конечномерный неприводимый L_0-подмодуль V''. Выберем V' так, чтобы $V'^* = V''$. Тогда $\operatorname{Hom}^c_{\mathfrak{L}}(T(V)/T, T(V'')) \neq 0$, т. е. существует такой инвариантный оператор $c: T(V) \to T(V')$, что $c(T) = 0$.

(ii) Поскольку c — не изоморфизм, то из теоремы 2 вытекает, что $T(V) = K^r$, $T(V'') = K^{r+1}$ — два соседних члена в одной из последовательностей теоремы 1, а $c: K^r \to K^{r+1}$ соответствующий гомоморфизм. Выпишем предыдущий член последовательности: $K^{r-1} \to K^r \to K^{r+1}$ (если $K^r = \Omega^0$, этого сделать нельзя, но в этом случае $T \subset \operatorname{Ker} c$, откуда $T = k \,.\, 1 = \operatorname{irr} \Omega^0$). Положим $T' = d^{-1}T$. Применяя к T' те же рассуждения, мы получим, что либо $dT' = 0$, т.е. $T \cap \operatorname{Im} d = 0$, либо $T' = dK^{r-1}$ и тогда $T \supset \operatorname{Im} d$. Поскольку $T \subset \operatorname{Ker} c$, то из леммы Пуанкаре вытекает, что при $K^r \neq \Sigma_{-m}$ имеем $T = \operatorname{Im} d = \operatorname{Ker} c$ (случай $K^r = \Omega^0$ мы уже разобрали).

Если $K^r = \Sigma_{-m}$, то либо $T = \operatorname{Im} d$, либо $T = \operatorname{Ker} c$, либо T — одномерное дополнение к $\operatorname{Im} d$ в $\operatorname{Ker} c$. Тогда ясно, что $T = k \,.\, h$, где $h = \xi_1 \ldots \xi_m {}'\partial_1 \ldots {}'\partial_n \Delta$. Однако легко проверить, что это пространство не $\mathfrak{L}$-инвариантно (например, ${}'\partial_{n+1} h$ не пропорционален h). Значит этот случай невозможен.

Мы получили полное описание всех замкнутых подмодулей во всех модулях $T(V)$, из которого легко вытекает теорема 3.

3.8. Доказательство теоремы 4. Формула 1) очевидна, если учесть, что $\operatorname{ch} \Omega^0 = N$. Для доказательства формулы 2) воспользуемся последовательностью $d\Omega^r \xrightarrow{i} \Omega^{r+1} \xrightarrow{d} \Omega^{r+2} \xrightarrow{d} \ldots$, в которой $p(i) = \bar{0}$, $p(d) = \bar{1}$. Из точности этой последовательности мы получаем, что

$$\operatorname{ch} d\Omega^r = \sum_{l \geq r} (-\varepsilon)^l \operatorname{ch} \Omega^{r+l} = (N/D) \sum_{w \in W} \operatorname{sgn} w \,.\, w\Big[\sum_{l \geq 0} (-\varepsilon)^l e^{\varrho + r\varphi_1 + l\varphi_1}\Big]$$

$$= (N/D) \sum_{w \in W} \operatorname{sgn} w \cdot w[e^{\varrho + r\varphi_1}/(1 + \varepsilon e^{\varphi_1})].$$

Внося N под знак суммы, получаем формулу 2). Формула 3) — обобщение формулы 2) на отрицательные r — доказывается аналогично, с помощью последовательности $\ldots \xrightarrow{d} \Sigma_{-r-m-1} \xrightarrow{d} \Sigma_{-r-m}$.

Дополнение. Инвариантные операторы в гладких и формальных тензорных полях. Пусть $(\mathfrak{U})=(U, O_{\mathfrak{U}})$ — связная суперобласть (см. [9]) размерности (n, m) с координатами $x=(u, \xi)$. Пусть $\mathcal{F}(\mathfrak{U})=C^{\infty}(\mathfrak{U})$ — коммутативная супералгебра гладких функций на $\mathfrak{U}$, а $\mathrm{Vect}(\mathfrak{U})$ — супералгебра Ли векторных полей на $\mathfrak{U}$. Каждому представлению ϱ супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, m)$ в конечномерном суперпространстве V соответствует представление супералгебры Ли $\mathrm{Vect}(\mathfrak{U})$ в суперпространстве $T(\mathfrak{U}; V)=\mathcal{F}(\mathfrak{U})\otimes V$ тензорных полей; действие $\mathrm{Vect}(\mathfrak{U})$ на $T(\mathfrak{U}; V)$ задается той же формулой, что и в формальном случае.

Зададим на $\mathcal{F}(\mathfrak{U})$, $\mathrm{Vect}(\mathfrak{U})$, $T(\mathfrak{U}; V)$ топологию равномерной сходимости на компактах со всеми производными. Непрерывный гомоморфизм $\mathrm{Vect}(\mathfrak{U})$ — модулей $c: T(\mathfrak{U}; V_1) \to T(\mathfrak{U}; V_2)$ назовем инвариантным оператором. Оператор c является дифференциальным, если он локален, т. е. не увеличивает носитель. Суперпространство инвариантных дифференциальных операторов обозначим через $\mathrm{Hom}^{d}_{\mathrm{Vect}}(\mathfrak{U})$.

Предложение. $\mathrm{Hom}^{d}_{\mathrm{Vect}(\mathfrak{U})}(T(\mathfrak{U}; V_1), T(\mathfrak{U}; V_2))=\mathrm{Hom}^{c}_{W(n,m)}(T(V_1), T(V_2))$. *Элементы из этого пространства являются дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами.*

Доказательство. Пусть $c \in \mathrm{Hom}^{d}_{\mathrm{Vcet}}(\mathfrak{U})$, $p \in \mathfrak{U}$. Зададим гомоморфизм $\psi: T(\mathfrak{U}; V_1) \to V_2$ формулой $\varphi(t)=c(t)(p)$. Это непрерывный гомоморфизм. Поскольку c не увеличивает носитель, $\varphi(t)=0$, если $p \notin \mathrm{supp}\, t$. Из курса анализа вытекает, что $\varphi(t)=\Sigma a_{\varkappa}\partial^{\varkappa}t(p)$, где $\varkappa$ пробегает конечный набор мультииндексов, а $a_{\varkappa} \in \mathrm{Hom}_k(V_1, V_2)$. Из непрерывности c следует, что величины $|\varkappa|$ ограничены для всех точек в малой окрестности точки p; то есть в окрестности точки p гомоморфизм c является дифференциальным оператором. Поскольку $[c, \partial_i]=0$ при всех i, то c — оператор с постоянными коэффициентами. Так как это верно для всех точек $p \in \mathfrak{U}$, то c — глобальный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Аналогично проверяется, что $\mathrm{Hom}^{c}_{W(n,m)}$ состоит из дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Условие, что оператор c вида $\Sigma a_{\varkappa}\partial^{\varkappa}$, где $a_{\varkappa} \in \mathrm{Hom}\,(V_1, V_2)$ лежит в $\mathrm{Hom}^{d}_{\mathrm{Vect}}(\mathfrak{U})$ или $\mathrm{Hom}^{c}_{W(n,m)}$ означает, что $[C, D]=0$ для $D \in \mathrm{Vect}(\mathfrak{U})$ или $D \in W(n, m)$ соответственно. Рассмотрим для каждой точки $p \in \mathfrak{U}$ морфизм супералгебр Ли $\alpha_p: \mathrm{Vect}(\mathfrak{U}) \to W(n, m)$ (разложение в ряд Тейлора в точке p). Поскольку образ α_p всюду плотен, то из $[C, \mathrm{Vect}(\mathfrak{U})]=0$ следует, что $[c, W(n, m)]=0$. Обратно, пусть $[c, W(n, m)]=0$. Дифференциальный оператор $[C, D]$, где $D \in \mathrm{Vect}(\mathfrak{U})$ имеет нулевое разложение в ряд Тейлора в каждой точке $p \in \mathfrak{U}$, откуда $[C, D]=0$, следовательно, $[C, \mathrm{Vect}(\mathfrak{U})]=0$. Предложение доказано.

Замечание. Операторы, инвариантные относительно всех замен переменных — это те, которые инвариантны относительно векторных полей из $\mathrm{Vect}(\mathfrak{U})$ и относительно дискретных преобразований из $\mathrm{Diff}\,\mathfrak{U}/\mathrm{Diff}_0\,\mathfrak{U}$, где Diff_0 — связная компонента единицы. Aposteriori очевидно, что все поля, инвариантные относительно $\mathrm{Vect}\,\mathfrak{U}$, инвариантны и относительно $\mathrm{Diff}\,\mathfrak{U}$. Таким образом, задачи описания инвариантных операторов в гладком и формальном случаях эквивалентны.

Теорема 5 (И. Н. Бернштейн). *Пусть V_1 и V_2 — неприводимые $\mathfrak{gl}(n, m)$-модули, $n>0$, а $c: T(\mathfrak{U}; V_1) \to T(\mathfrak{U}; V_2)$ — нелокальный инвариантный оператор. Тогда $T(\mathfrak{U}; V_1) = \Sigma_{n-m}(\mathfrak{U})$, $T(\mathfrak{U}; V_2) = \Omega^0(\mathfrak{U})$, а c пропорционален интегралу.*

Доказательство этой теоремы мы опустим.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Н. Бернштейн, Д. А. Лейтес. Интегральные формы и формула Стокса на супермногообразиях. *Функц. анализ и его прилож.* **11**, 1977, № 1, 80—81.
2. И. Н. Бернштейн, Д. А. Лейтес. Как интегрировать дифференциальные формы. *Функц. анализ и его прилож.*, **11**, 1978, № 3, 55—56.
3. И. Н. Бернштейн, Д. А. Лейтес. Неприводимые представления конечномерных супералгебр Ли серии W. В сб. *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*, Ярославль, 1979.
4. П. Я, Грозман. Классификация инвариантных бинарных дифференциальных оператовов на тензорных полях. *Функц. анализ и его прилож.*, **14**, 1980, № 2, 56—57.
5. П. Я. Грозман. Инвариантные дифференциальные операторы в тензорных полях на плоскости. *Вестн. Моск. гос. ун-та, Мат., мех.*, 1989, № 6, 6—10.
6. А. А. Кириллов. Об инвариантных дифференциальных операторах на геометрических величинах. *Функц. анализ и его прилож.*, **11**, 1977, № 2, 39—44.
7. А. А. Кириллов. Инвариантные операции над геометрическими величинами. *Итоги науки и техники*, **16**, Москва, 1980, 3—29.
8. Д. А. Лейтес. Формулы для характеров неприводимых представлений простых конечномерных супералгебр Ли. *Функц. анализ и его прилож.*, **14**, 1980, № 2, 25—32.
9. Д. А. Лейтес. Введение в теорию супермногообразий. *Успехи мат. наук*, **34**, 1980, № 1, 3—57.
10. В. И. Огиевецкий, Л. Мезинческу. Симметрии между бозонами и фермионами и суперполя. *Успехи физич. наук*, **117**, 1975, 637—684.
11. А. Н. Рудаков. Неприводимые представления бесконечномерных алгебр Ли картановского типа. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **38**, 1974, 835—866.
12. А. Н. Рудаков. Неприводимые представления бесконечномерных алгебр Ли серий S и H. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **39**, 1975, 496—511.
13. И. А. Схоутен, Д. Дж. Стройк. Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. I. Москва, 1939; т. II. Москва, 1948.
14. А. В. Шаповалов. Конечномерные неприводимые представления гамильтоновых супералгебр Ли, *Матем. сб.*, **107**, 1978, 259—274.
15. Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс. Кососимметрические инвариантные дифференциальные операторы на прямой. *Функц. анализ и его прилож.*, **13**, 1979, № 4, 91—92.
16. J. N. Bernstein, D. A. Leites. Irreducible representations of Lie superalgebras of type W and S. *C. r. Acad. Sci. bulg.*, **32**, 1979, 277—278.
17. D. Freedman, P. van Nieuwenhuizen. Supergravity and the Unification of the Laws of Physics. *Sci Amer.* N T—2, 1978, 126—143; перевод и комментарии в *Успехи физич. наук*, **128**, 1979, 135—160.
18. V. G. Kac. Lie superalgebras, *Adv. Math.*, **26**, 1977, 8—96.
19. O. Veblen. Differential invariants and geometry. *Atti del Congreso. Internazionale dei Matematici*, Bologna, 1928.
20. Ф. А. Березин. Дифференциальные формы на супермногообразиях. *Ядерная физика*, **30**, 1979, 1168—1174.

Московский государственный университет
Москва СССР
Карельский филиал АН СССР
Петрозаводск СССР

Поступила 11. 2. 1980