Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ПОВЕРХНОСТИ С $p_g=3$, $K^2=3$, ЧАСТЬ 2

ВАЛЕНТИН В. ИЛИЕВ

Дано описание поверхностей с $p_g=3$, $K^2=3$ и типа I (не требуется обильность канонического класса). Они являются минимальными разрешениями двойных рациональных особенностей своих нормальных канонических моделей, которые реализуются как поверхности степени шесть во взвешенном трехмерном проективном пространстве типа (1, 1, 1, 2). Доказывается, что двухканоническое отображение — биголоморфное по mod $\mathcal{E}$. Доказывается также, что две поверхности этого вида изоморфны тогда и только тогда, когда их нормальные канонические модели — G-эквивалентны, где G — 15-мерная алгебраическая группа.

Эта работа является прямым продолжением [2] и использует всюду обозначения этой первой части.

5. Описание поверхностей с $p_g=3$, $K^2=3$ и типа I.

Теорема 5.1. *Пусть S — минимальная поверхность с $p_g=3$, $K^2=3$ и типа* I. *Тогда ее нормальная каноническая модель изоморфно вкладывается в $\mathbb{P}^3(1, 1, 1, 2)$ как множество X, состоящее из всех нулей квазиоднородного многочлена типа* (1, 1, 1, 2), *степени шесть, удовлетворяющего условию B) из п. 1. Кроме того, фактор-отображение $\Phi^{\sigma}_{\pi^*K}:S \to X$ является минимальным разрешением особенностей поверхности X.*

Доказательство. Все леммы 2.1. — 2.11. верны без предположения об обильности канонического класса. В частности, из леммы 2. 11. следует, что в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\Phi_{\pi^*K}} & Y \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\eta} \\ S & \xrightarrow{\Phi^{\sigma}_{\pi^*K}} & X \end{array}$$

отображение Φ_{π^*K} — бирегулярное по mod $(\cup_{i=1}^{t} E_i)$ и является минимальным разрешением двойных рациональных особенностей поверхности Y. Если $Y=v(F)$, то $X=v(F^*)\subset\mathbb{P}^3(1, 1, 1, 2)$, где $F(x_0: x_1: x_2: x_3)=F^*(x_0, x_1, x_2, x_3^2)$. Таким образом мы имеем изоморфизм $X\cong \mathrm{Proj}\,(\mathbb{C}[w_0, w_1, w_2, w_3]/(F^*))$. С другой стороны, из леммы 2.3. и 2.10. следует, что $\oplus_{m\geq 0} H^0(S, O(mK))=\mathbb{C}[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \mu]$ и $F^*(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \mu)=0$ является единственным алгебраическим соотношением, которое связывает $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \mu$, т. е. $\mathbb{C}[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \mu]\cong\mathbb{C}[w_0, w_1, w_2, w_3]/(F^*)$ и X — нормальная каноническая модель поверхности S.

Так как $\Gamma=\Phi^{-1}_{\pi^*K}(H_3)$ и $2\Gamma\sim K_T$, то $(\Gamma, E_i)=0$, т. е. кривая ветвления H_3 накрытия η не содержит точек из $\mathrm{Sing}\,(Y)$ (имеем $\cup_{i=1}^{t} E_i=\Phi^{-1}_{\pi^*K}(\mathrm{Sing}(Y))$). Следовательно $\mathrm{Sing}\,Y=\eta^{-1}(\mathrm{Sing}\,(X))$. Инволюция σ индуцирует подстановку

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 7, 1981, с. 390—395.

σ на множестве $\{E_1, \ldots, E_t\}$, которая, очевидно, является снова инволюцией. Пусть $\sigma=\tau_1\ldots\tau_s$ — ее представление в виде непересекающихся циклов. Очевидно, что (длина $\tau_k)\leqq 2$. С другой стороны, если $\Phi_{\pi^*K}(E_i)=y$, то $\Phi_{\pi^*K}(\sigma E_i)=\sigma(y)\neq y$. В частности $E_i\cap\sigma E_i=\varnothing$ и, следовательно, (длина $\tau_k)\geqq 2$, т. е. (длина $\tau_k)=2$ для каждого $k=1,\ldots,s$. Это означает, что каждый цикл τ_k является транспозицией, $t=2s$ и, если $\pi(\{E_1,\ldots,E_t\})=\{E'_1,\ldots,E'_s\}$, то $\pi^*E'_k=E_i+\sigma E_i$, где $\tau_k(E_i)=\sigma E_i$, $\tau_k(\sigma E_i)=E_i$. Кроме того, $\Phi^\sigma_{\pi^*K}(E'_k)=x$, где $x=\eta(y)$ и ограничение

$$\Phi_{\pi^*K}: S-\cup_{k=1}^{s}E'_k\to X-\mathrm{Sing}(X)$$

является изоморфизмом. Следовательно $\Phi^\sigma_{\pi^*K}: S\to X$-минимальное разрешение двойных рациональных особенностей поверхности X. Равенства $E'^2_k=-2$ и рациональность кривых E'_k следуют из этого, но их можно получить и непосредственно: $E'^2_k=(1/2)\ (\pi^*E'_k)^2=(1/2)(E_i+\sigma E_i)^2=-2$, $(K,\ E'_k)=0$, откуда следует, что (виртуальный род кривой $E'_k)=0$, т. е. E'_k — рациональная кривая. Теорема 5.1. доказана.

Теорема 5.2. *Двухканоническое отображение $\Phi_{2K}: S\to\mathbb{P}^6$-биголоморфное по* mod $(\cup_{k=1}^{s}E'_k)$.

Доказательство. Имеем $\pi^1(S-\cup_{k=1}^{s}E'_k)=T-\cup_{i=1}^{t}E_i$ и утверждение следует из леммы 2.7, 2.8, 2.11. и очевидного факта, что Φ_{2K} „стягивает" связные компоненты множества $\cup_{k=1}^{s}E'_k$ в точки.

Замечание 1. Так как ограничение $\Phi_{\pi^*K}:\Gamma\to H_3$ является изоморфизмом, то H_3 — гладкая и неприводимая кривая.

Теорема 5.3. *Пусть $X=v(F^*)\subset\mathbb{P}^2(1,\ 1,\ 1,\ 2)$, где $F^*(w_0, w_1, w_2, w_3)$— неприводимый квазиоднородный многочлен типа $(1,\ 1,\ 1,\ 2)$, степени шесть с условием, что $F=F^*(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3^2)$ имеет вид (2), удовлетворяет условию* В) *из п. 1. и* $\mathrm{Sing}\,(X)$ *состоит из двойных рациональных особенностей. Тогда минимальное разрешение этих особенностей — поверхность с $p_g=3$, $K=3$ и типа* I.

Доказательство. *Пусть $Y=v(F)\subset\mathbb{P}^3$* и $\eta: Y\to X$ — каноническое двухлистное накрытие, разветвленное по кривой H_3, для которой ввиду В) имеем $H_3\cap\mathrm{Sing}\,(Y)=\varnothing$. Тогда, очевидно, $\eta^{-1}(\mathrm{Sing}\,(X))=\mathrm{Sing}\,(Y)$ и Y имеем только двойные рациональные особенности. Пусть $\psi': T\to Y$ — минимальное разрешение этих особенностей и $\psi=j\circ\psi'$, где $j: Y\to\mathbb{P}^3$ — естественное вложение. Если обозначим $\psi^*O_{\mathbb{P}^3}(1)$ через $\mathcal{L}$ и $\psi^*(H_0)$ через D, то $\mathcal{L}=O([D])$. После эвентуальной замены координат вида

$$\begin{pmatrix} x'_0\\ x'_1\\ x'_2\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$x'_3\quad=\quad x_3\quad A\in GL_3(\mathbb{C}),$$

(которая индуцирует замену „координат" в $\mathbb{P}^3(1,\ 1,\ 1,\ 2)$) можно предположить, что $H_0\cap\mathrm{Sing}\,(Y)=\varnothing$ и тогда, очевидно, $D^2=H_0^2=6$. Дальше, вопреки наличию двойных рациональных особенностей, на Y можно применить конструкцию из [4, стр. 234], которая дает, что K_Y — локально-главный дивизор на Y и $K_Y \sim 2H_0$. При помощи теоремы 2.7. из работы [5] М. Артина получаем, что $K_T \sim \psi^*(2H_0) = 2D$. Отсюда сразу следует, что T — минимальная поверхность. На самом деле, если Λ — исключительная кривая первого рода на T, то $-1 = (K_T, \Lambda) = 2(D, \Lambda)$ — противоречие.

При помощи бирационального изоморфизма ψ' инволюция σ поднимается до бирациональной инволюции σ на T, которая на самом деле является бирегулярной, так как T — минимальная поверхность. Кроме того, гладкая неприводимая кривая $\Gamma = \psi^*(H_3)$ является неподвижной для σ. Автоморфизмы σ и $\sigma^2 = \mathrm{id}$ образуют группу, очевидно изоморфную группе $\mathbb{Z}_2$. Пусть $S = T/\mathbb{Z}_2$ и $\pi: T \to S$ — естественная проекция с кривой ветвления Γ и гнездом ветвления $C = \pi(\Gamma)$. 2-форма $\omega = y_3\omega_3$ — σ-инвариантная на Y и $(\omega)|_Y = H_0 + H_3$. Очевидно, что ω — σ-инвариантная 2-форма на T и $(\omega)_T = D + \Gamma$, т. е. (Лемма 1.1) ω является регулярной 2-формой на S и $(\omega)|_S = K$ с $\pi^*K = D$. Так как $H^0(Y, O([H_0])) = \mathbb{C}x_0 \oplus \mathbb{C}x_1 \oplus \mathbb{C}x_2 \oplus \mathbb{C}x_3$, то если обозначим $\lambda_0 = \psi^*(x_0)$, $\lambda_1 = \psi^*(x_1)$, $\lambda_2 = \psi^*(x_2)$, $\xi = \chi^*(x_3)$, мы получаем, что $H^0(T, O(\pi^*K)) = \mathbb{C}\lambda_0 \oplus \mathbb{C}\lambda_1 \oplus \mathbb{C}\lambda_2 \oplus \mathbb{C}\xi$, причем $\lambda_i^\sigma = \lambda_i$, $\xi^\sigma = -\xi$, т. е. $H^0(S, O(K)) = \mathbb{C}\lambda_0 \oplus \mathbb{C}\lambda_1 \oplus \mathbb{C}\lambda_2$ и в частности $p_g(S) = 3$. Дальше имеем $K_T \sim \pi^*K + \Gamma$ и $K_T \sim 2D \sim 2\Gamma$, откуда $\pi^*K \sim \Gamma$ и $K^2 = (1/2)\ (\pi^*K)^2 = (1/2)\Gamma^2 = (1/2)D^2 = 3$. Если повторим с незначительной модификацией рассуждения из п. 1, шаг 4, получим, что S — минимальная поверхность.

Наконец, легко заметить, что 2-форма веса 2 $\omega = y_3^4\omega_3 \otimes^2$ переносится на S и $(\omega)|_S = C$, т. е. $C \in |2K|$.

Итак, мы попали в ситуации из доказательства Теоремы 5.1. Это позволяет заключить, что если обозначим $\Phi_{\pi^*K} = \psi$, то $\Phi^\sigma_{\pi^*K}: S \to X$ — минимальное разрешение особенностей поверхности X. Теорема 5.2. доказана.

Теоремы 5.1 и 5.3 соответствуют теоремам 2.1. и 1.1. из первой части этой работы и заканчивают описание поверхностей типа I.

6. По направлению к глобальному пространству модулей. Пусть кольцо многочленов $\mathbb{C}[w_0, w_1, w_2, w_3]$ — градуированное условием $\deg w_0 = \deg w_1 = \deg w_2 = 1$, $\deg w_3 = 2$ и $\mathbb{C}[w, w_3] = \oplus_{m \geq 0} M_m$ — соответствующая градуировка. Здесь M_m — $\mathbb{C}$-линейное пространство квазиоднородных многочленов типа (1, 1, 1, 2) и степени m и мы обозначили для краткости $w = (w_0, w_1, w_2)$. Имеем $M_0 = \mathbb{C}$, $M_1 = (w_0, w_1, w_2)$, $M_2 = (w_i w_j,\ 0 \leq i \leq j \leq 2,\ w_3)$ и т. д. Если φ — градуированный автоморфизм степени 0 кольца $\mathbb{C}[w, w_3]$, то ограничение φ на M_m является $\mathbb{C}$-линейным автоморфизмом пространства M_m. Пусть

$$\begin{pmatrix} \varphi(w_0) \\ \varphi(w_1) \\ \varphi(w_2) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$
$$\varphi(w_3) = c w_3 - H(A^{-1}w),$$

где $A \in GL_3(\mathbb{C})$, $H = \Sigma_{0 \leq i \leq j \leq 2} h_{ij} w_i w_j$, $h_{ij} \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}^*$. Можно предполагать, что $H \in S_3(\mathbb{C})$, где $S_3(\mathbb{C})$ — множество симметрических матриц порядка 3. Задание тройки (A, H, c) из $GL_3(\mathbb{C}) \times S_3(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$ определяет вполне φ. Итак, существует биекция

$$\mathrm{Grad\,Aut}_0\, \mathbb{C}[w, w_3] \longrightarrow GL_3(\mathbb{C}) \times S_3(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$$
$$\varphi \longmapsto (A, H, c)$$

и она оснащает алгебраическое многообразие $G'=GL_3(\mathbb{C})\times S_3(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*$ структурой алгебраической группы с групповым законом $(A, H, C)(B, K, d)=(AB, d^tBHB+K, cd)$, где ${}^tB$ означает транспонирование матрицы B. Легко увидеть, что для центра группы G' имеем $Z(G')=\{(D(t^{-1}), 0, t^2) \mid t\in\mathbb{C}^*\}\cong\mathbb{C}^*$ ($D(t)$ — диагональная матрица с элементом t на главной диагонали) и, что он состоит из тех элементов группы G', которые соответствуют градуированным автоморфизмам степени 0, индуцирующим тождественное отображение на схеме $\mathbb{P}^3(1, 1, 1, 2)\cong\operatorname{Proj}\mathbb{C}[w, w_3]$. Обозначим через G алгебраическую группу $GL_3(\mathbb{C})\times S_3(\mathbb{C})$ с групповым законом $(A, H)(B, K)=(AB, {}^tBHB+K)$. Имеем естественный гомоморфизм вложения $G\to G'$, $(A, H)\mapsto(A, H, 1)$ и композиция $G\to G'\to C'/Z(G')$ — сюръективная с ядром $\{(\pm I, 0)\}\cong Z_2$. При помощи этого вложения можно определить естественное действие группы G на градуированное кольцо $\mathbb{C}[w, w_3]=\oplus_{m\geq 0}M_m$: если обозначим через $\varphi_{(A, H)}$ автоморфизм из $\operatorname{Grad}\operatorname{Aut}_0\mathbb{C}[w, w_3]$, соответствующий элементу $(A, H, 1)\in G'$ и $F^*\in\mathbb{C}[w, w_3]$, то $(A, H)F^*=\varphi_{(A, H)}(F^*)$. На схеме $\mathbb{P}^3(1, 1, 1, 2)$ группа действует двойственным образом.

Если S — поверхность типа I, то ввиду Теоремы 5.1. канонический гомоморфизм $\mathbb{C}[w, w_3]\to\mathbb{C}[\lambda, \mu]\to 0$, где $\lambda=(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ индуцирует вложение $X\subset\mathbb{P}^3(1, 1, 1, 2)$ и, очевидно, поверхности S' и S'' изоморфны тогда и только тогда, когда их нормальные канонические модели $X'=v(F_1^*)$ и $X''=v(F_2^*)$ изоморфны. Оправдание существования настоящего пункта является следующей теоремой.

Теорема 6.1. *Поверхности S' и S'' с $p_g=3$, $K_2=3$ и типа I являются изоморфными тогда и только тогда, когда их нормальные канонические модели $X'=v(F_1^*)$ и $X''=v(F_2^*)$ в $\mathbb{P}^3(1, 1, 1, 2)$ являются G-эквивалентными.*

Доказательство. Часть „тогда" — тривиальна. Пусть теперь S' и S'' — изоморфные поверхности. Изоморфизм между ними индуцирует градуированный изоморфизм степени 0 их поликанонических колец:

$$\varphi:\mathbb{C}[\lambda', \mu']\underset{\substack{\lambda'\mapsto\lambda''\\ \mu'\mapsto\mu''}}{\longleftrightarrow}\mathbb{C}[\lambda'', \mu''],$$

который определяется, очевидно, следующими данными: $\lambda''=A^{-1}\lambda'$, $\mu''=c\mu'-H(A^{-1}\lambda')$, где $A\in GL_3(\mathbb{C})$, $H\in S_3(\mathbb{C})$, $c\in\mathbb{C}^*$. Те же самые данные опреляют градуированный автоморфизм φ степени 0 кольца $\mathbb{C}[w', w_3']$ такой, что диаграмма

$$(7)\qquad\begin{array}{ccc}\mathbb{C}[w', w_3'] & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}[w'', w_3''] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}[\lambda', \mu'] & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}[\lambda'', \mu''] \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0\end{array}$$

является коммутативной. Двойственным образом имеем коммутативную диаграмму схем:

$$
(8)\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^3(1,\ 1,\ 1,\ 2) & \mathbb{P}^3(1,\ 1,\ 1,\ 2), \arrow[l, "\varphi^*"'] \\
X' \arrow[u] & X'' \arrow[l, "\varphi^*"'] \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

причем вертикальные стрелки — замкнутые иммерсий. Простые идеалы (F_1^*) и (F_2^*) являются ядрами сюръективных гомоморфизмов из (7) и, очевидно, $\varphi^*((F_2^*))=(F_1^*)$, т. е. $\varphi^{-1}((F_2^*))=(F_1^*)$ или $(F_2^*)=\varphi((F_1^*))=(\varphi F_1^*)$. Если $c\neq 1$, то можно взять композицию φ с автоморфизмом, соответствующим элементу $(D(c^{1/2}),$ $0,\ c^{-1})$ из центра группы G'. Это не меняет замкнутые иммерсий из (8) и, кроме того, φF_1^* имеет снова старший коэффициент 1, т. е. $\varphi F_1^*=F_2^*$ или $F_2^*(w', w_3')=F_1^*(w'', w_3'')=F_1^*(A^{-1}w', w_3'-H(A^{-1}w'))$. Теперь ясно, что $X'=\varphi^*_{(A,H)}(X'')$ т. е. X' и X'' — G-эквивалентны. Теорема 6. 1. доказана.

Пусть V_1 — множество квазиоднородных многочленов типа $(1, 1, 1, 2)$ и степени 6, которые имеют только двойные рациональные особенности и удовлетворяют следующему условию: если

$$
(9)\qquad F^*(w,\ w_3)=f_6(w)+f_4(w)w_3+f_2(w)w_3^2+cw_3^3,
$$

то $c=0$ и $\{f_6(w)=0\}$ — гладкая плоская кривая (такие многочлены существуют; например многочлен

$$
F^*(w,\ w_3)=(1/54)w_0^6-w_1^6-w_2^6-((1/2)\ w_0^2+w_1^2+w_2^2)w_3^2-w_3^3
$$

имеет одну двойную рациональную точку с „координатами" $(1,\ 0,\ 0$ $\pm\sqrt{-1}/\sqrt{3}))$. Можно допустить, что $c=-1$. Тогда V_1 — открытое множество в $\mathbb{C}^{49}=\mathbb{P}^{49}-\{c=0\}$ (здесь $\mathbb{P}^{49}=\mathbb{P}(M_6)$). Группа G действует на $\mathbb{P}^{49}=\mathbb{P}(M_6)$ следующим образом: $(A,\ H)F^*(w,\ w_3)=F^*(A^{-1}w,\ w_3-H(A^{-1}w))$. Пусть V $=\bigcup_{(A,\,H)\in G}(A,\ H)V_1$. Тогда V является G-инвариантным и теорема 6.1. показывает, что множество, состоящее из всех поверхностей типа I с точностью до изоморфизма, находится в биективном соответствии с фактор-множеством V/G. Проблема модулей состоит в том, чтобы наделить это множество какой-то алгебраической структурой так, что каноническое отображение $V\to V/G$ — морфизм в соответствущей категории.

Лемма 6.1. *Если для F^* из (9) однородный многочлен $3f_4(w)+f_2^2(w)$ является гладким или $f_2(w)=f_4(w)=0$, то стационарная подгруппа $S(F^*)$ $=\{(A,\ H)\in G\mid(A,\ H)F^*=F^*\}$*-конечна.

Доказательство. По формуле Тейлора имеем $(A,\ H)F^*=F^*(A^{-1}w,\ w_3$ $-H(A^{-1}w))=F^*(A^{-1}w,\ -H(A^{-1}w))+(\partial F^*/\partial w_3)(A^{-1}w,\ -H(A^{-1}w))\,w_3$ $+(1/2)(\partial^2F^*/\partial w_3^2)(A^{-1}w,\ -H(A^{-1}w))w_3^2-w_3^3$ и $(A,\ H)\in S(F^*)$ означает, что

$$
\begin{aligned}
f_2(w)&=(1/2)(\partial^2F^*/\partial w_3^2)(A^{-1}w,\ -H(A^{-1}w)),\\
f_4(w)&=(\partial F^*/\partial w_3)(A^{-1}w,\ -H(A^{-1}w)),\\
f_6(w)&=F^*(A^{-1}w,\ -H(A^{-1}w)).
\end{aligned}
$$

Первое уравнение дает $H(A^{-1}w)=(1/3)(f_2(w)-f_2(A^{-1}w))$, а второе уравнение показывает, что многочлен степени четыре $3f_4(w)+f_2^2(w)$ — A-инвариантный. Если $f_2(w)=f_4(w)=0$, то третье уравнение дает, что многочлен f_6 является

A-инвариантным. В обоих случаях можно применить классический результат о том, что если однородный гладкий многочлен степени >2 является A-инвариантным, то такие $A\in GL_3(\mathbb{C})$ — конечное число (см. [6]). Лемма 6.1. доказана.

Обозначим через V_1' открытое множество в V_1, состоящее из тех F^*, для которых многочлен $3f_4(w)+f_2^2(w)$ является гладким и пусть $V'=\cup_{(A,H)\in G}(A, H)_1'$. Множество V' — G-инвариантное и если $O(F^*)$ — орбита элемента F^*, то $\dim O(F^*)=\dim G=15(O(F^*)\cong G/S(F^*)$ как алгебраические многообразия). Кроме того, лемма о замкнутых орбитах (см. [1], §3) показывает, что $O(F^*)$ — замкнутое множество в V', т. е. верна

Лемма 6.2. *Действие группы G на квазипроективном многообразии V' является замкнутым.*

Лемма 6.3. *Группа G является полупрямым произведением групп $GL_3(\mathbb{C})$ и $S_3(\mathbb{C})$ относительно представления*

$$GL_3(\mathbb{C})\longrightarrow \operatorname{Aut} S_3(\mathbb{C})$$
$$A\to(H\longrightarrow {}^tAHA).$$

Доказательство. Определение групповой операции в G.

Заметим, что $S_3(\mathbb{C})$ (соотв. $GL_3(\mathbb{C})$) при помощи замкнутого вложения $H\to(I, H)$ (соотв. замкнутого вложения $A\to(A, 0)$) является нормальным делителем (соотв. замкнутой подгруппой) группы G, причем фактор-группа $G/S_3(\mathbb{C})$ изоморфна группе $GL_3(\mathbb{C})$. Обозначим через V'' множество, состоящее из тех F^*, для которых $f_2(w)=f_4(w)=0$. Это те поверхности, которые описаны в п. 3. Тогда группа $GL_3(\mathbb{C})=\{(A, 0)\in G\}$ совпадает с множеством элементов $(A, H)\in G$, для которых из $F^*\in V''$ следует что $(A\ H)F^*\in V''$. Теперь ясно, что определено действие группы $GL_3(\mathbb{C})$ на V'' и лемма 6.1. показывает, что каждый элемент $F^*\in V''$ имеет конечная стационарная подгруппа. В этом контекст утверждение Теоремы 6.1. совпадает с Предложением 3.3.—фактор $V''/GL_3(\mathbb{C})$ изоморфен фактору $U/PGL(2)$ из конца п. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. Дьедонне, Дж. Керрол, Д. Мамфорд. Геометрическая теория инвариантов, Москва, 1974.
2. В. В. Илиев. Поверхности с $p_g=3$, $K^2=3$, Часть 1. *Сердика* **6**, 1980, 352—362.
3. Чжень Шэн-Шень. Комплексные многообразия. Москва, 1961.
4. И. Р. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии. Москва, 1972.
5. M. Artin. Some numerical criteria for contractability of curves an algebraic surfaces. *Amer. J. Math.*, **84**, 1962, 485—496.
6. P. Orlik, L. Solomon. Singularities II: Automorphisms of forms. *Math. Ann.*, **231**, 1978 229—240.

Единый центр математики и механики 1090 София П. Я. 373

Поступила 26. 3. 1980